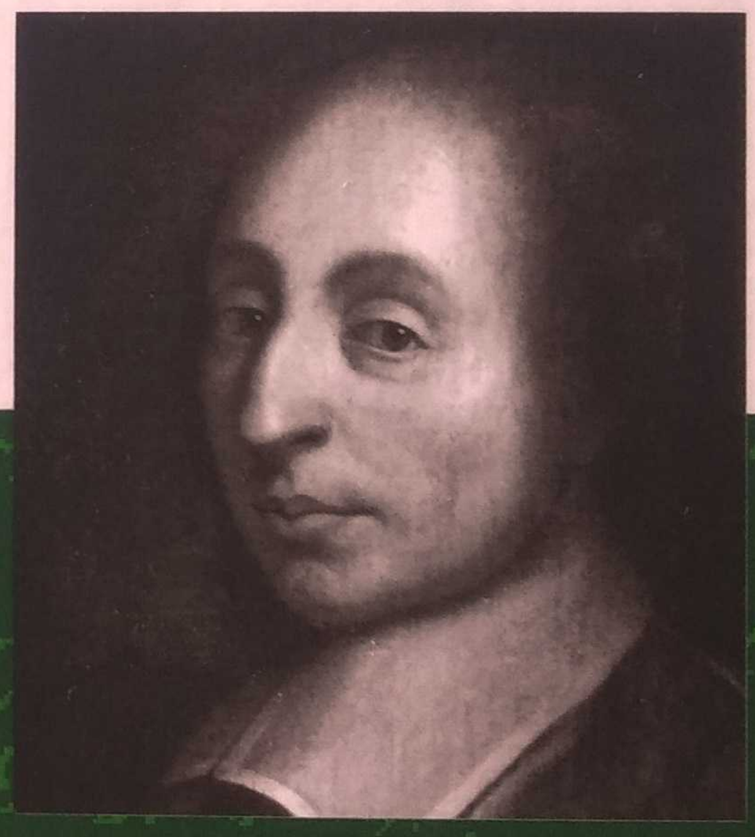
Los fundamentos
de la probabilidad

Pascal



$$f_{i,j} = \sum_{k=1}^{j} f_{i-1,k}$$

GENIOS
de las
MATEMÁTICAS

Los fundamentos
de la probabilidad

Pascal

RBA

© 2016, Jordi Deulofeu Piquet y Roger Deulofeu Batllori
por el texto
© 2017, RBA Coleccionables, S.A.U.

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí
Diseño interior: Luz de la Mora
Infografías: Joan Pejoan
Fotografías: Album: 25, 29b, 33, 77b, 105, 145; Archivo RBA: 31, 48, 51a, 51b, 52, 61, 77ai, 77ad, 96, 103ai, 103ad, 103b, 129a, 129bi, 129bd, 139; Pierre Poschadel: 115; Shutterstock: 29a.

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada o transmitida por ningún medio sin permiso del editor.

ISBN (Obra completa): 978-84-473-8775-5
ISBN: 978-84-473-9109-7
Depósito legal: B-19458-2017

Impreso y encuadernado en Cayfosa (Impresia Ibérica)

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

INTRODUCCIÓN 7

CAPÍTULO 1 Las cónicas y el estudio de la geometría proyectiva .. 15

CAPÍTULO 2 La aritmética y el cálculo mecánico: *la pascalina* 39

CAPÍTULO 3 Pascal y la física 55

CAPÍTULO 4 El triángulo aritmético, o de Pascal 71

CAPÍTULO 5 Pascal y el origen del cálculo de probabilidades 89

CAPÍTULO 6 Contribuciones al cálculo infinitesimal 109

CAPÍTULO 7 La obra de Pascal entre la ciencia y la filosofía 133

LECTURAS RECOMENDADAS 153

ÍNDICE 155

Introducción

Blaise Pascal, uno de los grandes pensadores del siglo XVII, fue un niño prodigio que a los dieciséis años ya escribió un pequeño tratado sobre las cónicas; un importante físico, que aportó relevantes evidencias sobre la presión atmosférica y defendió la existencia del vacío, enfrentándose al mito del *horror vacui*; un filósofo interesado, entre muchas otras cosas, por las características del conocimiento, sus distintas formas y su adquisición, y también por la condición humana, y, finalmente, un creyente alineado con el jansenismo, que reflexionó y escribió sobre los aspectos fundamentales de la religión cristiana, separando claramente el conocimiento adquirido por la razón y la experimentación, del conocimiento revelado.

Esta versatilidad lo convirtió en un personaje difícil de explicar y aparentemente contradictorio. Poseía, de una parte, habilidades e intereses que le llevaban a dedicarse a las ciencias, tanto las deductivas (matemáticas) como las empíricas (física), con un objetivo claro: todo aquello que se descubre debe ser demostrado por la razón o la experiencia. De otro lado, mostró cierta predisposición a experimentar estados de carácter sobrenatural (en su caso, religioso), a modo de revelaciones, que no se pueden explicar ni por la razón ni tampoco por la experiencia. Esta dualidad fue expresada por el propio Pascal con uno de sus conocidos aforismos: «El corazón tienen razones que la razón no conoce».

Su vida, de apenas treinta y nueve años (1623-1662), estuvo marcada por la enfermedad desde épocas tempranas; las dolencias nunca le abandonaron, obligándole a pasar largos períodos en cama. Apenas conoció a su madre, pero su padre, Étienne, un alto funcionario del rey y excelente matemático aficionado, fue una persona muy influyente en su vida. También estableció una relación importante con sus dos hermanas. Después de un breve período mundano, entre 1652 y 1654, en el cual frecuentó ambientes libertinos, vivió su «segunda conversión», tras la cual inició el último período de su vida, marcada de nuevo por la enfermedad, sus preocupaciones de tipo religioso y el acercamiento al jansenismo. En este período escribió la parte principal de su obra filosófica y teológica, como son las *Cartas provinciales* y los *Pensamientos*.

En ese tiempo, la Iglesia francesa vivía importantes conflictos internos: los jesuitas, sector elitista y culto, bien relacionado con la corte y el papa pero distanciado del pueblo llano, se enfrentaban a un sector menos poderoso, que propugnaba una renovación de la Iglesia de carácter popular, en la cual los misterios, milagros y rituales, junto con una vida sencilla, eran más apreciados que los sofisticados razonamientos. Este movimiento, liderado por los jansenistas, tuvo como centro el monasterio de Port-Royal-des-Champs.

En relación con la ciencia y la filosofía, el siglo XVII fue una época clave para el cambio entre el modelo clásico, representado por la escolástica seguidora de los principios de Aristóteles, cuyo máximo exponente había sido Tomás de Aquino (1224-1274), y la ciencia moderna. En este siglo, de la mano de Galileo, Pascal y Newton, entre muchos otros, se creó un nuevo paradigma, basado en el razonamiento y la experimentación, que sustituyó a los antiguos argumentos metafísicos y teológicos, para promover un modelo mecanicista que explicase el mundo. Y en el paradigma entrante, las matemáticas, como máximo exponente del razonamiento hipotético-deductivo, y las ciencias experimentales, tuvieron una función preponderante. La participación de Pascal en este proceso resultó fundamental, ya que fue uno de los primeros pensadores en propugnar una clara separación entre el conocimiento necesario para establecer los hechos científicos y los de carácter teológico.

El hecho de que Pascal resultase una voz discordante con ciertos planteamientos de la filosofía de su tiempo, dominada por el racionalismo (corriente de pensamiento que afirmaba la posibilidad de alcanzar verdades universales con el solo recurso del raciocinio, sin contrastación empírica exterior), no significa que se propusiera defender las creencias tradicionales de la vieja escolástica o que impusiera la autoridad de la tradición por encima de la razón. Pascal aceptaba y defendía el racionalismo en el terreno de la ciencia (aunque con algunas limitaciones), pero consideraba que este no podía extenderse al terreno de la moral y la religión.

Todos estos temas serán expuestos en los distintos capítulos del libro, organizados de acuerdo con las principales aportaciones de Pascal a las matemáticas (las cuales, lejos de focalizarse en un tema, corresponden prácticamente a cada una de las distintas ramas de dicha disciplina que se desarrollaron a lo largo del siglo XVII). Siguiendo de manera aproximada la cronología de la vida de Pascal, se empieza por la geometría, ya que los primeros trabajos de matemáticas se relacionan con las cónicas. Así, el primer capítulo expone algunos de los principales resultados que estableció Pascal tras los trabajos de su compatriota Gérard Desargues, iniciador de la geometría proyectiva. El punto central es el llamado «teorema de Pascal», o «teorema del hexagrama místico», una clásica demostración sobre puntos alineados a partir de la cual es posible deducir una gran cantidad de propiedades geométricas fundamentales.

El segundo capítulo es quizás el que más se aleja de las matemáticas en sentido estricto, ya que se dedica a la *pascalina*, la primera máquina mecánica de calcular que se fabricó y funcionó de manera efectiva, aunque únicamente para realizar adiciones y sustracciones. Los problemas para su construcción fueron más de tipo tecnológico que matemático, y el artefacto en sí representa un claro ejemplo de la versatilidad y tenacidad del joven Pascal para lograr sus objetivos.

Siguiendo la vida de Pascal, el tercer capítulo se dedica a sus principales trabajos de física, que realizó en los últimos años de la década de 1640. Se centraron fundamentalmente en dos cuestiones: la presión atmosférica, llamada en la época «el problema del

peso del aire», y la existencia del vacío. La relevancia de estos trabajos se debe por un lado a la importancia dada por Pascal a la experimentación, como principal método para establecer resultados en física, y por otro a la destrucción de uno de los mitos que todavía permanecían de la Antigüedad, la imposibilidad de la existencia del vacío, y que supuso la principal disputa con el gran filósofo y científico francés René Descartes, quien seguía defendiendo el mito del horror al vacío. El experimento del Puy de Dome (1648), uno de los más célebres de la historia dentro del estudio de los fluidos, vino a confirmar la existencia de la presión atmosférica.

En los capítulos cuarto y quinto se analiza el *Traité du triangle arithmetique*, obra redactada en 1654 pero publicada póstumamente, en 1665. El capítulo cuarto repasa los estudios sobre el triángulo aritmético, también conocido como «triángulo de Pascal»; sus propiedades, su aplicación a la combinatoria y, de manera destacada, la contribución de su autor a la creación de un nuevo método de demostración matemática, llamado «método de inducción completa», que Pascal utilizó de manera explícita y razonada por primera vez en la historia, al demostrar una de las propiedades del triángulo aritmético. Por otra parte, el capítulo quinto se centra en el nacimiento de la probabilidad, que la historia sitúa en la correspondencia de 1654 entre Pascal y el también matemático Pierre de Fermat, y en la cual discutieron sobre la resolución de diversos juegos de azar. En concreto, las resoluciones dadas por ambos, distintas pero concordantes, al llamado «problema de la partida interrumpida».

El capítulo sexto, propiamente el último que analiza la producción matemática de Pascal, corresponde a los trabajos realizados cerca del final de su vida, sobre todo en 1658. Se centra en los grandes conceptos del naciente cálculo infinitesimal, las tangentes y las cuadraturas, así como en sus problemas asociados, para mostrar cuál era la visión de Pascal sobre ellos y, en particular, cuáles fueron sus contribuciones al nacimiento de los conceptos de derivada y de integral. Sin duda, Pascal tuvo diversas intuiciones que lo situaron a las puertas de esta nueva y fundamental rama de las matemáticas, como dijo el filósofo y matemático alemán Gottfried Leibniz —uno de sus creadores, junto a Newton— cuando afirmó que fue gracias

a la lectura de Pascal, y en concreto a su construcción del llamado «triángulo característico», que tuvo la idea clave que lo llevaría a establecer el concepto de derivada. El capítulo también se refiere a los trabajos de Pascal sobre la cicloide, llamada por él «*la roulette*», una de las curvas más estudiadas en el siglo XVII.

Siendo Pascal un gran pensador cuya obra va mucho más allá de su producción matemática y científica, el libro finaliza con la exposición de algunas de las principales ideas de Pascal sobre el saber y sus distintos tipos; la función de la ciencia y de las matemáticas en el conocimiento del mundo; la idea de infinito y otros temas que relacionan el pensamiento filosófico con el científico. También se incluye en este capítulo el conocido *pari de Pascal*, el razonamiento en forma de apuesta ganadora que utilizará para mostrar que vale la pena creer en la existencia de Dios, razonamiento que, en cierto sentido, está más cerca de la moderna teoría de juegos y el análisis de la toma de decisiones, que de las supuestas demostraciones de Descartes sobre la existencia de Dios que Pascal criticó ampliamente y de las que se alejó por considerar que el racionalismo poco podía aportar a las cuestiones religiosas.

La figura de Pascal es ampliamente recordada por la ciencia, dado que su nombre figura como referencia de principios, teoremas, unidades físicas... Así, en el campo de la geometría hablamos del teorema de Pascal, en aritmética y combinatoria nos referimos al «triángulo de Pascal», en física destaca el «principio de Pascal», y también en la actualidad recibe el nombre de «pascal» (Pa) la unidad para medir la presión del Sistema Internacional de Unidades. Finalmente, la primera máquina mecánica para calcular recibió el nombre de «pascalina» y, a caballo entre la probabilidad y los argumentos sobre la existencia de Dios, nos referimos a la llamada «apuesta de Pascal». Todos estos pequeños homenajes recuerdan los distintos campos en los que Blaise Pascal hizo contribuciones relevantes, que serán comentadas a lo largo de los capítulos que integran este libro.

1623 El 19 de junio nace Blaise Pascal en Clarmont (actualmente Clermont-Ferrand), hijo del matrimonio formado por Étienne Pascal (1588-1651), alto funcionario de hacienda y matemático, y Antoinette Begon. Tuvo dos hermanas, Gilberte (1620-1687) y Jacqueline (1625-1661).

1626 Muere la madre de Pascal.

1640 Publica *Essay pour les coniques*. Se trata de su primer trabajo matemático, realizado cuando contaba con tan solo diecisiete años de edad.

1642 Empieza a trabajar en el diseño de la *pascalina*, la primera máquina de calcular mecánica.

1646 Los hermanos Deschamps introducen a la familia Pascal al jansenismo.

1648 Se lleva a cabo el experimento del Puy-de-Dome sobre el peso del aire y la existencia del vacío, realizado por Florien Perrier, cuñado de Pascal, bajo la supervisión de este.

1649 Obtiene por la *pascalina* —cuya construcción había finalizado en 1645— un privilegio equivalente a una patente.

1651 Muere su padre, Étienne. Poco después, su hermana Jacqueline ingresa en el convento jansenista de Port Royal.

1651 Concluye el *Traité de l'equilibre des liqueurs* y el *Traité de la pesanteur de la masse de l'air*, que no vio publicados en vida.

1654 Correspondencia con Pierre de Fermat sobre la resolución de juegos de azar. Redacción del *Traité du triangle arithmétique*.

1654 Experimenta una segunda conversión. Abandona toda actividad matemática y científica.

1658 Regresa a la actividad matemática. Propone un concurso sobre problemas relacionados con la cicloide y redacta la *Histoire de la roulette*.

1658 Realiza sus últimos trabajos matemáticos: se trata de diversas cartas y folletos con problemas sobre centros de gravedad y otras cuestiones relacionadas con los inicios del cálculo infinitesimal, firmados con el pseudónimo de Amos Dettonville.

1662 El 19 de agosto muere tras una larga enfermedad, en casa de su hermana Gilberte.

1663 Publicación póstuma del *Traité de l'equilibre des liqueurs* y del *Traité de la pesanteur de la masse de l'air*.

1665 Publicación póstuma del *Traité du triangle arithmetique*.

CAPÍTULO 1

Las cónicas y el estudio de la geometría proyectiva

El interés del joven Pascal por la geometría pudo deberse a la influencia de su padre, matemático notable, y a su temprana relación con el círculo de Marin Mersenne. Con su primera publicación, *Essay pour les coniques* (1640), Pascal se unió a los defensores de la geometría sintética —quienes desarrollaron métodos para formular y demostrar teoremas relevantes— frente a la geometría analítica, que suscitaba creciente interés.

Blaise Pascal nació en Clermont-Ferrand, Francia, el 19 de junio de 1623. Era hijo de Étienne Pascal, un alto funcionario de justicia y hacienda, titulado universitario y al mismo tiempo notable matemático, y de su esposa Antoinette Begon, que falleció en 1626, cuando Blaise tenía tan solo tres años. El futuro filósofo y matemático tuvo dos hermanas, Gilberte (nacida en 1620) y Jacqueline (1625). Nunca acudió a la escuela, pues fue educado por su padre, quien centró su formación en las lenguas clásicas y las ciencias, y en particular en las matemáticas. Uno de los motivos por los que no recibió enseñanza formal fue su precaria salud. Gilberte, que junto a su padre y su otra hermana se ocuparon de Blaise, indicó en su biografía que desde los dieciocho años su hermano nunca pasó un día sin dolencias.

El tipo de educación recibida resulta muy importante para entender las características de la obra y el modo de pensar de Pascal, así como las grandes diferencias que mantuvo con algunos de sus contemporáneos, en particular con un ilustre compatriota, el filósofo y también matemático René Descartes (1596-1650). En efecto, desde niño se vio liberado de una enseñanza dominada por la escolástica (la filosofía medieval desarrollada en el ámbito eclesiástico, conceptualmente deudora del pensamiento aristotélico) y unos aprendizajes fundamentalmente memorísticos, para centrarse en una educación basada en los ideales humanistas, que

priorizaba la experimentación y la autonomía individual por encima del dogmatismo de las escuelas.

La familia Pascal cambió de residencia frecuentemente, por motivos políticos y económicos, a causa de los distintos nombramientos a puestos relevantes de Étienne. Así, se trasladaron todos a París en noviembre de 1631, pero tuvieron que volver a Clermont-Ferrand siete años más tarde, debido a las opiniones públicas de su padre, discrepantes con la política fiscal de la Corona, que pasaba por momentos difíciles a causa de la guerra contra España.

«Apenas hubo llegado a la edad de la razón, dio muestras de una inteligencia extraordinaria, tanto en las pequeñas respuestas como sobre todo por sus preguntas sobre la naturaleza de las cosas.»

— Gilberte Périer, hermana de Pascal.

Hacia 1634, Blaise se interesó por las matemáticas, inicialmente en contra de la opinión de su padre, quien consideraba que era demasiado pronto para ello y juzgaba como prioritario mejorar su conocimiento en lenguas clásicas. Sin embargo, cuando Étienne descubrió que su hijo, de apenas 12 años, estaba tratando de demostrar a escondidas la proposición treinta y dos de los *Elementos* de Euclides (ca. 325-ca. 265), gran matemático de la Grecia helenística, se dio cuenta del talento de Blaise y le permitió continuar con el estudio de las matemáticas, que se convirtieron en la principal pasión del joven.

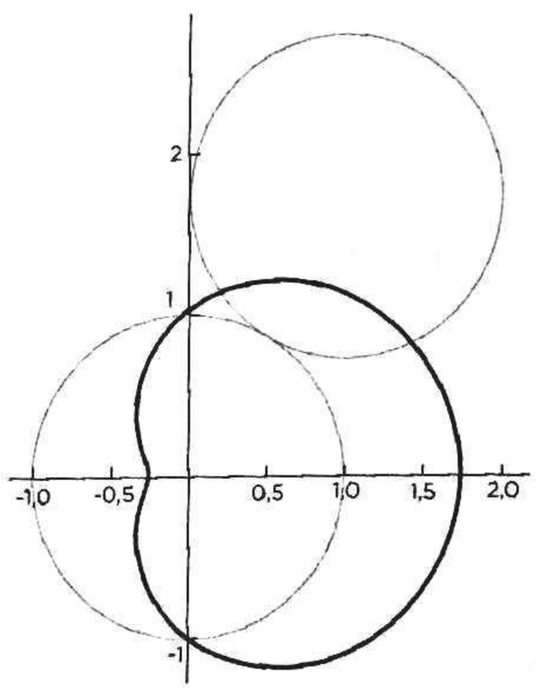
Después de profundizar en la obra de Euclides y, según parece, de demostrar por sí mismo muchas proposiciones de los *Elementos*, cuando tenía catorce años fue introducido por su padre en la academia parisina que dirigía el clérigo y científico Marin Mersenne (1588-1648). Allí descubrió Blaise los recientes trabajos del matemático e ingeniero francés Gérard Desargues (1591-1661), fundador de la geometría proyectiva, que le servirían de base para su primera obra, *Essay pour les coniques* (*Ensayo sobre las cónicas*), publicada en 1640. Poco antes de que este tratado fuera dado a la imprenta, en 1639, Étienne Pascal obtuvo

ÉTIENNE PASCAL

Étienne Pascal (Clarmont, 1588-París, 1651), padre de Blaise, fue una persona muy importante para la vida de este, tanto en el terreno personal (la esposa y madre falleció cuando Blaise tenía tres años) como en su formación académica y su inclinación por las matemáticas. Jurista de renombre, ejerció primero en Clarmont y años más tarde en Ruan (Normandía). También un notable matemático, si bien *amateur*, algo frecuente en la Francia de su época (baste recordar que Pierre de Fermat, acaudalado jurista de Toulouse, dedicó su tiempo libre a realizar una gran obra matemática, la cual nunca fue publicada y solo se conoce en la actualidad por las cartas que intercambió con Descartes, con quien tuvo más de una polémica, y con el propio Blaise Pascal).

El caracol de Pascal

La aportación más relevante de Étienne en el campo de las matemáticas fue el estudio de una curva, hoy conocida como «el caracol de Pascal» (en honor a Étienne y no a Blaise, como a veces se piensa). El nombre fue sugerido por su contemporáneo Gilles de Roverbal (1602-1645). Esta curva, cuya ecuación es, en coordenadas polares, $r = a + b\cos\theta$, donde r representa el radio y θ el ángulo, era ya conocida por Jordano Nemorario (Jordanus Nemorarius, estudioso poco conocido de finales del siglo XII), y posiblemente por otros matemáticos más antiguos, con el nombre de «conchoide del círculo». Esta curva se obtiene como la trayectoria descrita por un punto que se ha seleccionado en el interior de un círculo dado, el cual se hace girar, sin deslizamiento, alrededor de otro círculo de igual radio. Obviamente, se trata de una curva cerrada cuya forma varía de acuerdo con el punto seleccionado. En algunos casos, la curva que se obtiene se interseca consigo misma, mientras que en otros no lo hace.



un puesto importante como recaudador de impuestos en Ruan, en el norte del país, y un año después toda la familia se trasladó a dicha ciudad.

LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

Pascal fue un precoz científico y dicha precocidad se mostró principalmente en el campo de las matemáticas. Así, su *Essay pour les coniques* contribuyó al resurgimiento de la geometría. En esta obra planteó y demostró el entonces llamado «teorema del exagrama místico», que hoy se conoce como «teorema de Pascal».

A la luz de este primer trabajo sobre geometría, surge la pregunta de cómo un muchacho de dieciséis años pudo plantear y demostrar ciertas propiedades sobre las cónicas (las curvas resultantes de las intersecciones entre un cono y un plano), alguna de notable dificultad. El propio Pascal explicó que las principales ideas para realizar su trabajo provenían de Gérard Desargues, geómetra asiduo a las reuniones científicas de Mersenne.

LA IMPRONTA DE DESARGUES

Desargues fue un ingeniero y arquitecto militar interesado por todas aquellas investigaciones científicas cuyos resultados pudieran utilizarse para fines tangibles, como la mejora de la salud u otras aplicaciones que sirvieran para mejorar la vida de las personas; estaba interesado, por ejemplo, en la construcción de relojes de sol, un tema relevante en el siglo XVII y directamente relacionado con el estudio de las cónicas, o en el tallado de piedras para la construcción. Estas inquietudes lo llevaron a ocuparse de la perspectiva, y en particular de las proyecciones, sobre las cuales publicó dos cortos trabajos en 1636 y 1640.

De modo paralelo se ocupó de diversas propiedades sobre las cónicas, para lo cual utilizó elementos de la incipiente geometría proyectiva, publicando en 1639, a petición de sus alumnos, el tra-

bajo que llevaba por título *Brouillon-Project d'une atteinte aux evenements des recontres d'un cone avec un plan* (*Borrador de un ensayo sobre los resultados de los encuentros de un cono con un plano*). Por este motivo se considera a Desargues como el creador y principal cultivador, en su época, de la rama de las matemáticas llamada geometría proyectiva, inicialmente alejada de los problemas prácticos.

Desargues constató que las tres cónicas (elipse, parábola e hipérbola) que se obtienen al proyectar una circunferencia sobre un plano desde un punto exterior, deberían mantener algunas de las propiedades que se cumplen para la circunferencia, y así recíprocamente. Esta evidencia le llevó a distinguir entre las propiedades que se mantienen y las que no lo hacen al realizar una proyección, que es la idea central de la geometría proyectiva. Llamamos «propiedades proyectivas» a las que se mantienen invariantes por proyecciones. Para el estudio y ampliación de las propiedades proyectivas, que incluían algunas propiedades ya conocidas, como paralelismo, razón doble, envolventes, dualidad, etc., Desargues introdujo los conceptos de «involución» (proyección que intercambia pares de puntos), término acuñado por él, y «polaridad», que es un caso particular de involución. Esto permitió ampliar notablemente el número de propiedades de las cónicas, destacando la conocida como «cuadrivértice completo», que lleva su nombre. Por otra parte, al extender sus consideraciones al espacio, realizó una observación relevante: un haz de rayos paralelos tiene iguales propiedades proyectivas que un conjunto de rayos concurrentes.

Este relevante trabajo de Desargues tuvo poca repercusión en su época, ya que solo utilizaron sus resultados Blaise Pascal y, algo después, Philippe La Hire (1640-1719), matemático y astrónomo francés. Entre los motivos para tan poca influencia cabe mencionar, por un lado, el estilo y la terminología utilizados por Desargues; pero, por encima de todo, la preponderancia de los métodos proporcionados por la geometría analítica, tras los trabajos del gran matemático francés Pierre de Fermat (1601-1665) y de Descartes (1596-1650), y por el naciente cálculo infinitesimal, con los trabajos del científico británico Isaac Newton (1642-1726) y del filósofo y científico alemán Gottfried Leibniz (1646-1716).

EL *ENSAYO SOBRE LAS CÓNICAS*

El primer escrito científico y el único de geometría publicado en vida de Pascal fue el ya citado *Ensayo sobre las cónicas*, un breve trabajo del cual se hizo una reducida edición de cincuenta ejemplares en París, en febrero de 1640, cuando Pascal tenía todavía dieciséis años. Se trata de un breve estudio de juventud, formado por definiciones, lemas, teoremas y problemas a abordar, que muestran el gran talento del joven matemático e incluyen el que se convertiría en el teorema de Pascal, así como el esbozo de un plan para realizar un estudio de las cónicas, a partir de este teorema y por medio de la geometría proyectiva. El hecho de que firmara el trabajo solo con las iniciales B. P., induce a pensar que el propio Pascal consideraba esta obra como un primer intento destinado, sobre todo, a sondear la reacción que podría suscitar un estudio más extenso y profundo que ya había empezado a desarrollar.

Aunque no diera a la imprenta otras obras de geometría, Pascal nunca interrumpió sus investigaciones en este campo. Muy al contrario, todo parece indicar que a lo largo de su vida fue elaborando un amplio tratado de conjunto, titulado *Conicorum opus completum*, cuyo manuscrito, prácticamente finalizado, estuvo en manos de Leibniz en 1676. Desgraciadamente, este tratado se ha perdido, y solo se dispone de referencias poco precisas sobre su contenido, como una nota del propio Pascal de 1654 a la Academia de París, y una carta de Leibniz que acompañó la devolución del manuscrito a los hermanos Périer, herederos de la obra de Pascal. Por tales causas, el ensayo sobre las cónicas, a pesar de ser una obra de juventud, cobra una gran importancia, al constituir el único legado impreso sobre el trabajo como geómetra de Pascal.

El contenido del *Ensayo* consta de tres definiciones generales, seguidas de tres lemas, que debían servir de base para el futuro tratado completo sobre las cónicas. A continuación, de manera esquemática se expone el enunciado de cinco teoremas fundamentales, destinados a mostrar de manera precisa cómo podía aplicarse su método general para establecer las distintas propiedades de las cónicas (sobre los diámetros, parámetros, tangentes y determinación y construcción de las distintas cónicas). Finalmente se exponen diversas aplicaciones y algunos problemas a resolver. En esta obra no se incluyen las demostraciones de los teoremas ni de las propiedades enunciadas, pero si la idea general que permite pasar de las propiedades para la circunferencia a las correspondientes para el resto de cónicas (elipse, parábola e hipérbola).

La primera definición establece la relación entre un haz de rectas paralelas y uno de rectas concurrentes, idea central de la geometría proyectiva. La segunda, referida a las secciones de un cono, muestra que Pascal consideraba las cónicas de manera general, de modo que fuera posible extender las propiedades determinadas sobre la circunferencia al resto de ellas. La tercera definición no es más que una precisión de lenguaje.

En cuanto a los lemas, en el primero se enuncia el conocido como teorema de Pascal, para el caso de la circunferencia, y en el lema tres su generalización para el resto de cónicas. El segundo lema es un teorema elemental de geometría del espacio.

Este breve trabajo finaliza con el enunciado de cinco teoremas relevantes, la mayoría no originales: uno de ellos se encuentra en una versión similar en Desargues y otro había sido ya formulado por el griego Apolonio de Pérgamo (ca. 262-ca. 190). Pascal quiso mostrar que su plan para el estudio de las cónicas consistía en obtener y probar, de manera general, el mayor número de propiedades posibles, originales o no, a partir de unos pocos lemas y sobre todo del teorema del hexagrama místico, el mismo que hoy lleva su nombre.

EL TEOREMA DE PASCAL O DEL HEXAGRAMA MÍSTICO

El enunciado de este famoso teorema, conocido como teorema de Pascal o del hexagrama místico (*Hexagrammum mysticum theorem*), es el siguiente: inscribimos un hexágono cualquiera en una circunferencia. Prolongamos dos lados opuestos y determinamos el punto donde se cortan. Repetimos la misma construcción para los otros dos pares de lados. Entonces, los tres puntos determinados de este modo están sobre una misma recta. La generalización del teorema consiste en considerar que el hexágono se puede ins-

cribir en una cónica cualquiera y demostrar que tres puntos obtenidos de la misma manera seguirán estando alineados.

Este teorema puede formularse para un hexágono simple inscrito en una circunferencia (figura 1).

También puede extenderse para una cónica cualquiera. En este caso, un hexágono inscrito en una elipse (figura 2).

FIG. 1

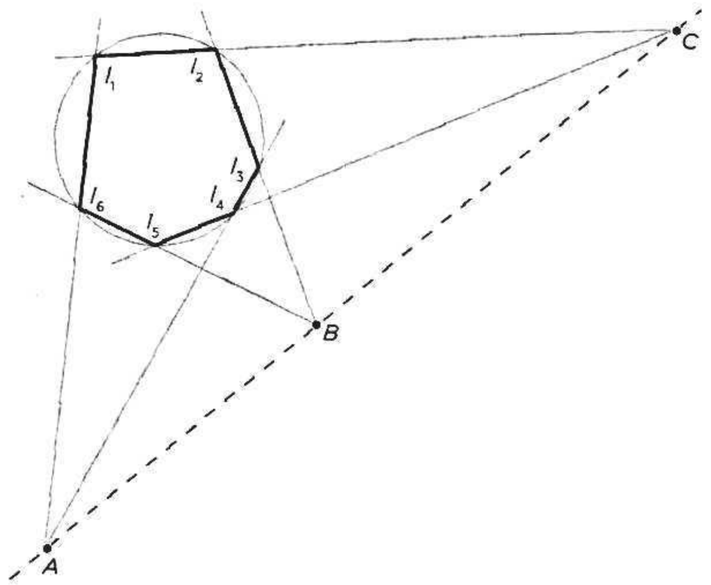
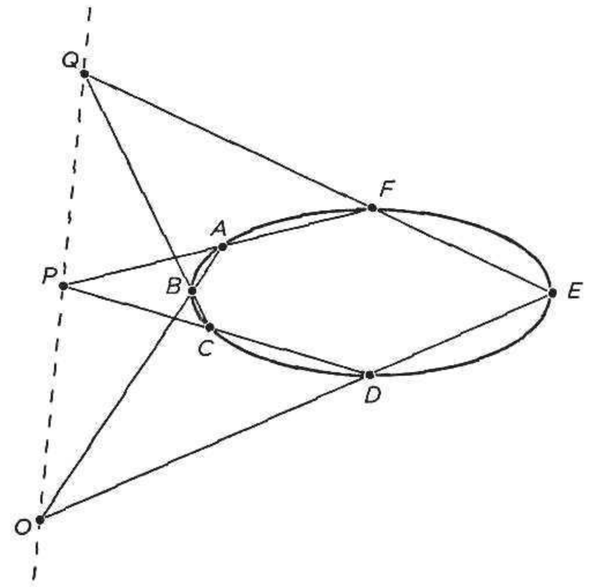


FIG. 2



APOLONIO Y EL INICIO DEL ESTUDIO DE LAS CÓNICAS

El matemático griego Apolonio de Pérgamo, representado en un grabado al aguafuerte de mediados del siglo XVII.

A lo largo de la historia, el estudio de las secciones cónicas ha sido un tema relevante en las matemáticas. Sobre este asunto, la obra más importante de la Antigüedad fue escrita por Apolonio de Pérgamo, quien, como otros grandes matemáticos de los siglos II y III de nuestra era, estudió y enseñó en Alejandría (Egipto), donde murió. El conjunto de su obra consta de ocho volúmenes y en ella introdujo los nombres de las cónicas (elipse, parábola e hipérbola), así como su definición precisa. Los cuatro primeros volúmenes recogen los conocimientos de la época y tratan temas como: los métodos de obtención y propiedades fundamentales de las cónicas; diámetros, ejes y asíntotas; propiedades de los focos y teoremas notables; e intersección de cónicas. Los otros cuatro libros (el último se ha perdido) muestran el nivel de conocimiento y profundización que alcanzó Apolonio en el estudio de las cónicas, y abordan los siguientes temas: segmentos de máxima y mínima distancia a una cónica, conceptos de normal y centro de curvatura; igualdad y semejanza de las secciones cónicas y su problema inverso (dada la cónica, hallar el cono), y relaciones métricas sobre diámetros. Las cónicas pueden definirse de diversas maneras: como secciones, al cortar un doble cono por un plano, o bien como proyecciones de una circunferencia sobre un plano cualquiera, definición que establece el lugar que ocupan en la geometría proyectiva. También pueden definirse como lugares geométricos, a partir de la idea de foco; por ejemplo, una elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano tal que la suma de sus distancias a dos puntos dados, llamados focos, es constante. En geometría analítica, todas estas curvas pueden expresarse mediante ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas. Así, una ecuación del tipo:

$$ax^2 + bx^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

corresponde a una cónica, o bien a una (o dos) rectas, según los valores de los parámetros. De esta manera se establece una conexión directa entre las cónicas y el álgebra, lo que facilita el establecimiento y demostración de muchas de sus propiedades.

Para un hexágono regular, sucede que todos los pares de lados son paralelos entre sí, por lo cual los tres puntos de intersección que aparecen en el enunciado del Teorema de Pascal se deben interpretar, en realidad, como puntos de la recta del infinito. Es decir, también en este caso estos puntos están alineados. Por otra parte, en el caso de que solo dos de los lados opuestos sean paralelos y, por lo tanto, no se corten en un punto del plano, entonces la recta determinada por los dos puntos correspondientes a los pares de lados que sí se cortan es paralela a los dos lados del hexágono que no se cortan. En particular, esto significa que el punto del infinito determinado por los lados paralelos está alineado con los otros puntos que aparecen en el enunciado del Teorema de Pascal, por lo que este es cierto también en este caso.

«El método geométrico, el más perfecto para los hombres, consiste en mantenerse en el justo medio, de no definir ni probar las cosas claras que comprenden todos los hombres, y definir y probar todas las demás.»

— **Blaise Pascal**, *Sobre el espíritu geométrico y el arte de persuadir.*

Un caso particular del teorema, donde en lugar de seis puntos sobre una cónica aparecen los puntos sobre dos rectas

Teorema de Pappus.

FIG 3

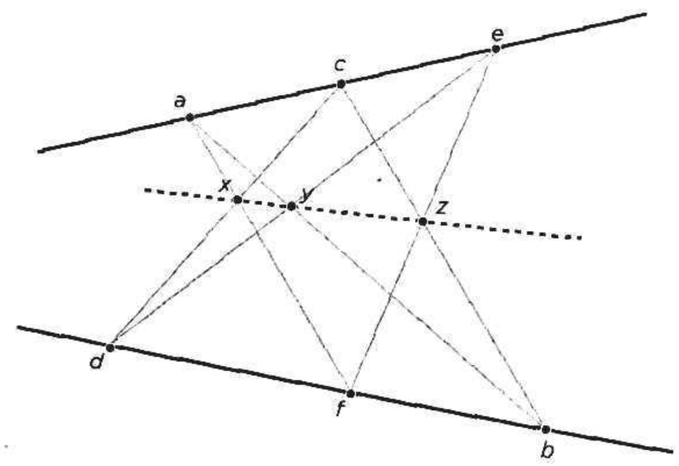
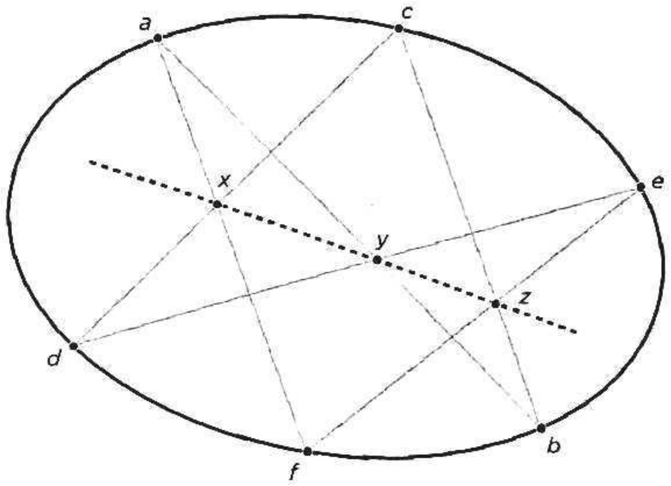


FIG. 4



El teorema de Pascal para un hexágono no simple sobre una elipse.

dadas, fue enunciado ya por otro matemático griego, Pappus de Alejandría, en el siglo IV de nuestra era. En concreto, el teorema de Pappus dice: si en un par de rectas dadas se eligen tres puntos cualesquiera en cada recta, y se unen de dos a dos, las intersecciones obtenidas por estas uniones estarán en una línea recta (figura 3).

Obsérvese que, en realidad, los seis lados del teorema de Pappus forman un hexágono no simple, obtenido al unir los puntos siguiendo el orden: *A*, *E*, *C*, *D*, *B* y *F*, y cerrando la figura de nuevo en *A*.

La idea de hexágono arbitrario para el cual se cumple el teorema de Pascal permite considerar cualquier unión de seis puntos situados sobre una cónica. Dados los puntos *A*, *C*, *E*, *B*, *F* y *D* sobre una elipse, se unen siguiendo el orden *A*, *B*, *C*, *D*, *E* y *F*, con lo que se obtiene un hexágono no simple (seis vértices y seis lados, pero con intersecciones entre ellos). En este caso, los lados del hexágono son: *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF* y *FA*, por lo que los pares de lados opuestos serán: *AB* y *DE*; *BC* y *EF*; *CD* y *FA*. Dado que los lados ya se cortan, no es necesario prolongarlos. El teorema de Pascal para este caso nos dice que los tres puntos de intersección, x, y, z están sobre una misma recta (figura 4).

Aunque Pascal no incluyó en el *Ensayo* la demostración de su teorema, todo parece indicar que pretendía demostrarlo posteriormente, en esa obra geométrica más amplia pero nunca publicada.

Una posible demostración puede dividirse en dos partes, la primera de las cuales se centra en el caso en que los seis puntos están sobre dos rectas (figura 5).

Mediante una proyección previa se supone que P y Q están en el infinito, con lo que se necesita probar que en este caso R también está en el infinito. Si P está en el infinito, significa que BC y EF son paralelas, y análogamente, si Q está en el infinito, AB y DE también son paralelas. Probar que R está en el infinito equivale a ver que AF y CD también son paralelas.

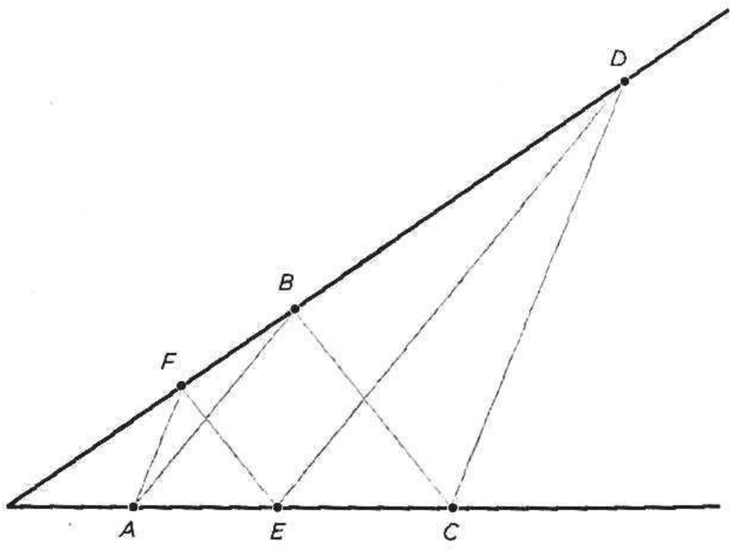
Del paralelismo entre las dos primeras rectas tenemos:

$$a / (a + x) = (b + y) / (b + y + s).$$

Del paralelismo entre las otras dos rectas se obtiene:

$$b / (b + y) = (a + x) / (a + x + r).$$

FIG. 5



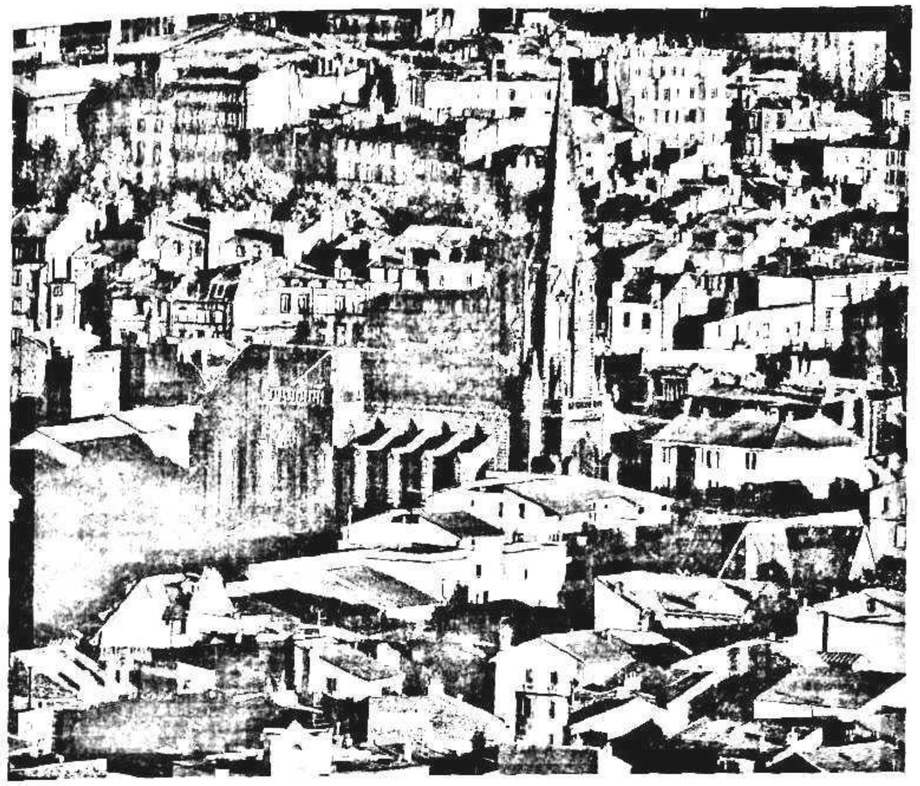


FOTO SUPERIOR:
Vista de Clermont-Ferrand, ciudad natal de Blaise Pascal, en la que destaca la basílica de Notre-Dame-du-Port.

FOTO INFERIOR:
***El triunfo de la verdad* (1847), lienzo del pintor italiano Luigi Mussini, ensalza a las principales personalidades que han contribuido al progreso del conocimiento. Pascal aparece al fondo, con cabello largo y rostro vuelto hacia el espectador, entre Copérnico, Cuvier y Giordano Bruno.**

De ambas igualdades, dividiendo miembro a miembro y simplificando los términos $a + x$ y $b + y$, se deduce que:

$$a / b = (a + x + r) / (b + y + s).$$

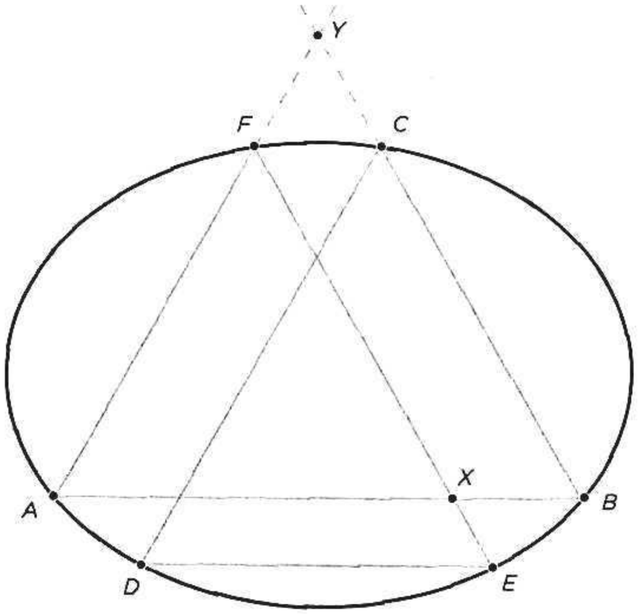
El caso general del teorema de Pascal se demuestra con un razonamiento análogo al que se acaba de utilizar para el caso anterior, mediante el uso de proyecciones.

Sin embargo, antes de realizar la demostración, es necesario explicar el concepto de razón doble, que servirá como base para la prueba.

La razón doble de cuatro puntos alineados A, B, C y D, se define como el cociente $(AC / BC) : (AD / BD)$. Esta razón permanece invariante al realizar una proyección, es decir, no depende de la recta por la que se corte el haz de rayos de la proyección. Por eso se dice que es un invariante proyectivo.

Sean A, B, C, D, E y F los vértices de un hexágono inscrito en una cónica K. Mediante una proyección puede hacerse que el lado AB sea paralelo a DE y que FA sea paralelo a CD (tal como se muestra en la figura 6). Demostrar el teorema equivale a ver que

FIG. 6



MERSENNE, ANIMADOR DE LA CIENCIA MODERNA

Marin Mersenne, matemático, filósofo, teólogo y teórico de la música, fue un religioso francés de la orden de los franciscanos mínimos, que vivió en París y dedicó su vida a la ciencia. Además, promovió el intercambio entre científicos de diversas disciplinas y distintos lugares (Mersenne opinaba que la ciencia avanzaría mucho más si los científicos desarrollaran sus estudios en comunidad, en lugar de hacerlo de manera aislada). Publicó diversas traducciones de trabajos de Galileo, del que fue un gran defensor, así como obras científicas recreativas. En 1635 creó la Academia Parisiensis, que llegó a contar con 140 miembros, entre los que destacaban Galileo, Descartes, Fermat, Desargues, Roverbal y Pascal. Sus reuniones científicas en París atraían a grandes pensadores de la época, y en ellas se promovía la discusión sobre las investigaciones que se estaban realizando en aquel momento. Así que tales encuentros fueron considerados como «el centro del mundo», por lo que se refiere a las matemáticas y las ciencias en la primera mitad del siglo XVII. Estas reuniones constituyeron el germen de lo que pronto sería la Académie des Sciences de Francia, fundada por el ministro Colbert en 1666.

El sacerdote y científico Marine Mersenne, animador de la escena científica europea de la primera mitad del siglo XVII.

CB es paralelo a FE, o lo que es lo mismo, a ver que si dos pares de lados opuestos se cortan en la recta del infinito, el tercer par también lo hace.

Para ello, considérense los puntos F, A, B y D. Proyectados desde cualquier punto de la cónica, de acuerdo con la geometría proyectiva, se obtienen cuatro rayos, de modo que la razón doble (k) permanece constante. Si se proyectan estos cuatro puntos desde C, los rayos proyectantes cortan la recta AF en cuatro puntos (F, A, Y e infinito), lo que permite establecer que $YF / YA = k$.

De manera análoga, si se proyectan los mismos puntos (F, A, B, D), desde E sobre la recta BA, se obtienen los puntos X, A, B e infinito. Al mantenerse la razón doble, ahora $BX / BA = k$.

Por lo tanto, resulta que $BX / BA = YF / YA$. Lo cual establece el paralelismo entre YB y FX, o lo que es lo mismo, entre CB y FE, que es lo que había que demostrar.

EL DESARROLLO DEL TEOREMA

Después de Pascal, la explicación del teorema siguió desarrollándose, lo que muestra su relevancia dentro de la geometría proyectiva. El matemático suizo Jakob Steiner (1796-1863) estudió la figura que se obtiene formando hexágonos de todas las formas posibles con seis puntos fijos en una cónica, y observó que se obtienen sesenta rectas de Pascal. Más tarde, en 1828 probó que las sesenta rectas de Pascal concurren por ternas en veinte puntos, llamados «puntos de Steiner».

En 1830, el matemático y físico alemán Julius Plücker (1801-1868) demostró que los puntos de Steiner están alineados, de cuatro en cuatro, sobre quince rectas, llamadas «rectas de Plücker».

Finalmente, el teorema fue generalizado en 1847 por el matemático y astrónomo alemán August Ferdinand Möbius (1790-1868), con la siguiente formulación: si un polígono con $4n + 2$ lados está inscrito en una sección cónica, y se prolongan los pares de lados opuestos, se obtienen por intersección $2n + 1$ puntos. Entonces, si $2n$ de estos puntos se encuentran sobre una misma recta, el punto que queda también se encontrará sobre dicha recta.

Un primer análisis de este teorema puede dar la impresión de que se trata de una curiosa propiedad sin mayor importancia. Sin embargo, el hecho de que Pascal lo situara en primer lugar (lema 1, caso particular; lema 3, generalización) muestra que quiso darle un papel fundamental, algo que fue corroborado por el testimonio de Mersenne (afirmó que, a partir del teorema, Pascal había deducido cerca de cuatrocientas proposiciones diferentes), y posteriormente por los comentarios de Leibniz. Como afirmara el historiador de la ciencia francés René Taton (1915-2004) en su estudio sobre los *Ensayos* de Pascal, el esfuerzo de axiomatización (la formalización de los conceptos que sostienen las teorías científicas) de las últimas décadas del siglo XIX permitió comprender el papel fundamental que tuvo este teorema para el desarrollo de la teoría de las cónicas.

GEOMETRÍA SINTÉTICA VERSUS GEOMETRÍA ANALÍTICA

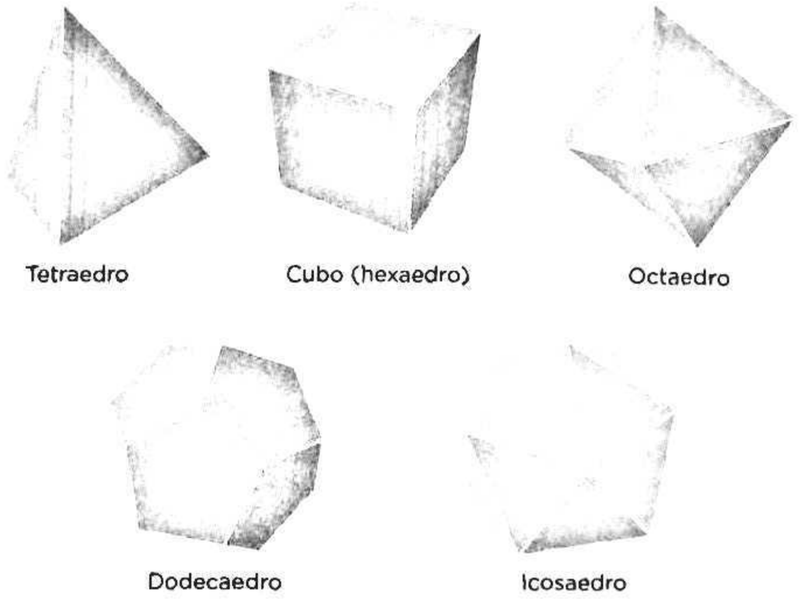
La geometría sintética, también llamada «pura» o «axiomática», consiste en el estudio de la geometría sin el uso de coordenadas y fórmulas. Se basa en axiomas (proposiciones evidentes que no requieren demostración previa, por ejemplo: el espacio consta de infinitos puntos) y sus herramientas son la regla y el compás, con los cuales se resuelven problemas y establecen propiedades. Los *Elementos* de Euclides ofrecen el ejemplo paradigmático de geometría sintética, que fue la más consistente hasta el siglo XVII, cuando todavía Fermat y Newton la consideraban esencial. El desarrollo del álgebra y el establecimiento de las coordenadas permitió establecer una estrecha relación entre los elementos de la geometría y su expresión algebraica, iniciándose con ello la llamada «geometría analítica», que permitió utilizar el análisis para resolver múltiples problemas complejos que hasta entonces parecían inabarcables. Como afirmó el geómetra alemán Felix Klein (1849-1925): «La geometría sintética es la que estudia las figuras como tales, sin recurrir a fórmulas, mientras que geometría analítica hace un uso reiterado de estas, que pueden establecerse de manera consistente gracias a la adopción de un sistema adecuado de coordenadas». Aunque los métodos analíticos tuvieron un gran desarrollo durante la segunda mitad del siglo XVII y toda la centuria posterior, muchos matemáticos del siglo XIX volvieron a dar relevancia a los métodos sintéticos, que nunca llegaron a desaparecer, sobre todo con la aparición de la geometría proyectiva, desarrollada inicialmente, como hemos visto, por Desargues y Pascal. Esto fue así por la necesidad de establecer los fundamentos de las recién aparecidas geometrías no euclidianas, así como de la mencionada geometría proyectiva. Jakob Steiner, entre otros, siempre prefirió los métodos sintéticos por encima de los analíticos.

El matemático suizo Jakob Steiner, defensor de la geometría sintética.

EL PRINCIPIO DE DUALIDAD Y LA EXTENSIÓN DEL TEOREMA DE PASCAL

Durante el siglo XVIII y la primera mitad de la centuria siguiente prosiguió el desarrollo de la geometría, en la que participaron insignes

FIG. 7



matemáticos, como el francés Gaspard Monge (1746-1818), su discípulo Charles Brianchon (1785-1864) y, sobre todo, el también francés Jean-Victor Poncelet (1788-1867), que en su *Traité des propietés projectives des figures* (*Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras*), publicado en 1822, integró el conjunto de métodos utilizados por sus predecesores y convirtió la geometría proyectiva en una rama autónoma de la geometría, con sus objetivos bien definidos, sus métodos específicos y sus propios resultados.

Durante cerca de dos siglos, los geómetras que siguieron la tradición clásica, representada por la geometría sintética frente a la nueva geometría analítica, trataron de dotar a aquella de unos principios que permitieran un nivel de generalización tan grande como el que estaba alcanzando la geometría analítica. Mientras esta, gracias al uso de las coordenadas cartesianas, quedaba liberada del estudio detallado de todos los casos posibles (algo necesario en la geometría sintética que razona directamente sobre los objetos geométricos), el descubrimiento de principios generales —como los de proyección, continuidad o dualidad— permitía dotar a la geometría sintética de potentes métodos de demostración. De este modo y lejos de producirse un acercamiento entre los dos puntos de vista (el sintético y el analítico), como había preconizado Monge, ambas geometrías siguieron caminos paralelos pero irreconciliables (sobre todo si se tiene en cuenta la postura de Poncelet, que inicialmente había aceptado el uso de coordenadas, pero más tarde se enzarzó en más de una polémica con los defensores de la geometría analítica, después de sus trabajos de síntesis de la geometría proyectiva).

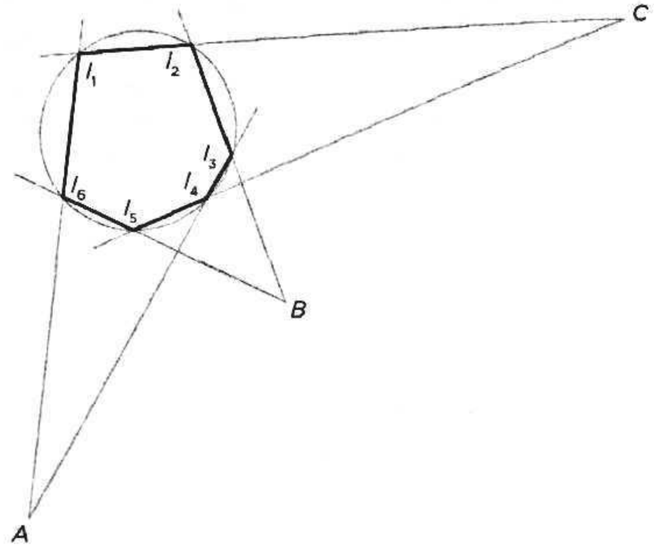
Uno de los principios más productivos para alcanzar nuevos resultados en geometría fue el conocido como «principio de dualidad»: en muchas ocasiones, el intercambio entre puntos y rectas —con la transformación de un punto en una recta y, recíprocamente, de una recta en un punto— permite formular y demostrar nuevas propiedades de las figuras en el plano.

> «El espacio es infinito en todas sus dimensiones e inmóvil en todo y en cada una de sus partes.»
>
> — Blaise Pascal.

Este principio puede considerarse igualmente en el espacio, y un ejemplo simple del mismo lo encontramos al considerar los poliedros regulares: si, dado un poliedro regular, se sustituye cada una de sus caras por un punto (el centro de la cara) y cada vértice por una cara (de la que los puntos son sus vértices), resulta que un cubo se transforma en un octaedro, un dodecaedro en un icosaedro y un tetraedro en otro tetraedro. Al contar el número de caras, aristas y vértices, se verá cómo el número de aristas se mantiene, mientras que, para los poliedros duales, el número de caras y de vértices se intercambia.

Poliedro	Caras	Vértices	Aristas
Tetraedro	4	4	6
Cubo	6	8	12
Octaedro	8	6	12
Dodecaedro	12	20	30
Icosaedro	20	12	30

FIG. 8



Así, para cada teorema se puede encontrar el que se conoce como «teorema dual», en particular el denominado «teorema dual proyectivo».

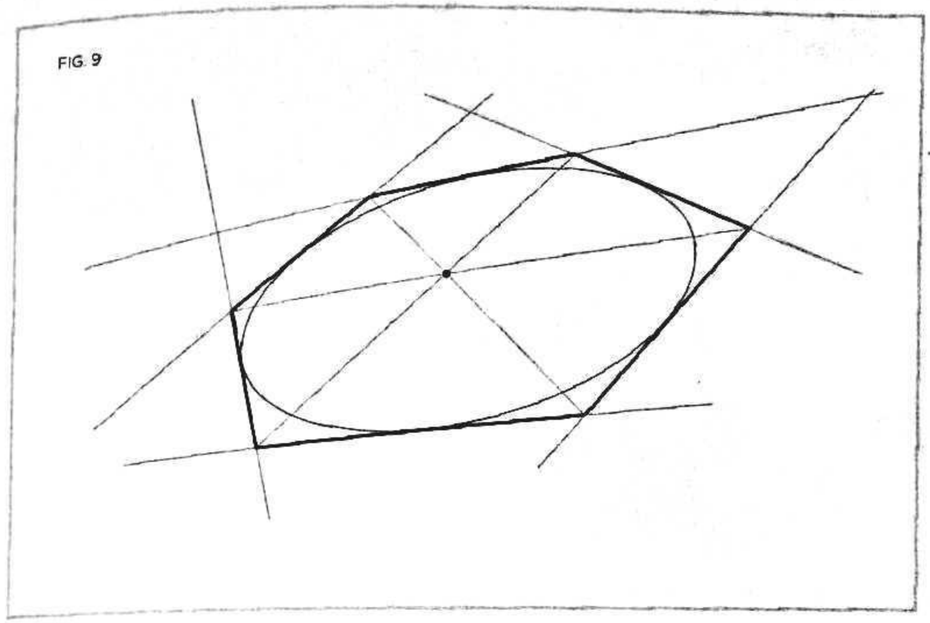
Según el teorema de Pascal, si un hexágono está inscrito en una cónica, los puntos de intersección de los lados opuestos están alineados.

Pues bien, de este modo estableció Brianchon su teorema dual, o «teorema de Brianchon»: si un hexágono está circunscrito a una cónica, las rectas que unen los vértices opuestos se cortan en un mismo punto (figura 9).

Las principales contribuciones de Pascal a la geometría se forjaron en la época de juventud, en los primeros años de su dedicación a las matemáticas, y pertenecen a la llamada geometría proyectiva, creada por Desargues, una visión de la geometría donde la medida no es lo más relevante y que se aleja de otras visiones preponderantes en su época, en particular de la algebrización defendida por Descartes.

Aun así, hay que decir que la geometría proyectiva fue posteriormente tratada desde el punto de vista analítico, al introducir las coordenadas homogéneas y, de hecho, la geometría algebraica moderna se desarrolla en su totalidad en el espacio proyectivo,

FIG. 9



usando este tipo de coordenadas. Este enfoque ha permitido, de hecho, demostrar muchos resultados extremadamente importantes, como el Teorema de Bezout, el cual garantiza que la intersección de dos curvas proyectivas planas sobre el cuerpo de los números complejos, sin componentes conexas comunes, de grados n y m, consta de exactamente nm puntos, contando multiplicidades. La ausencia de componentes conexas comunes se traduce en que el máximo común divisor de los polinomios que definen las curvas es 1. Estos resultados, si nos restringiéramos al enfoque sintético de la geometría, serían muy difíciles de probar. Es interesante, además, observar que existe una demostración muy elegante y sencilla del Teorema de Pascal basada precisamente en la aplicación del teorema de Bezout.

CAPÍTULO 2

La aritmética y el cálculo mecánico: la *pascalina*

Podría pensarse que la obra científica de Pascal estaba poco orientada a la resolución de problemas prácticos. Sin embargo, el interés que mostró por la geometría proyectiva tenía su origen fuera del ámbito de las matemáticas puras, pues trataba cuestiones como la perspectiva, que interesaron a los pintores del siglo XVI. La voluntad de Pascal por resolver cuestiones prácticas se hizo patente también en el diseño de la *pascalina*, la primera calculadora mecánica.

Uno de los asuntos de orden eminentemente técnico de los que Pascal se ocupó fue la realización de operaciones matemáticas elementales mediante un instrumento mecánico, que es considerado como la primera máquina de calcular mecánica construida de manera efectiva. Para ello, no solo se ocupó de los problemas de diseño de su calculadora, que se conoce con el nombre de *pascalina*, sino que realizó diversos prototipos, hasta alcanzar un instrumento que podía fabricarse y del cual se conservan en la actualidad diversos ejemplares. Aunque el problema de la realización de operaciones aritméticas es una cuestión propiamente matemática, el reto de su construcción en el siglo XVII era ante todo un problema tecnológico, ya que la dificultad principal estaba en pasar de un diseño inicial —el de Pascal no fue realmente el primer proyecto— a una máquina que funcionase realmente.

LOS MÉTODOS DE CÁLCULO ARITMÉTICO

En 1640, Pascal se trasladó con sus hermanas a Ruan para reunirse con su padre, quien, una vez resueltas sus discrepancias con la Corona francesa, había sido nombrado recaudador de impuestos por el hombre fuerte del reino, el cardenal Richelieu (Armand Jean

du Plessis, 1585-1642). Entre sus responsabilidades figuraban la represión de los alborotos de los campesinos de Normandía —disturbios que se conocen como la revuelta de los *Nu-Pieds*, los «pies desnudos»— y procurar que desistieran de su negativa a pagar los incrementos en los impuestos introducidos por el rey. Este hecho será decisivo para el joven Pascal, que ante el ingente trabajo de su padre, relacionado con los cálculos para el control del pago de impuestos, decidió ayudarle construyendo la ya citada *pascalina*.

La estancia en Ruan se prolongó hasta 1647, cuando Pascal regresó con su hermana a París, y durante ese tiempo, además de los trabajos con la calculadora, inició sus célebres experimentos de física sobre el cálculo de la presión atmosférica, destinados a probar la existencia del vacío. Además, tuvo por entonces la primera aproximación al jansenismo, la llamada «primera conversión». El jansenismo era un movimiento cristiano, fundado por el teólogo neerlandés Cornelio Jansenio (1585-1638), que defendía tanto el rigorismo moral como posiciones conciliaristas, que concedían a la comunidad de los fieles autoridad en la definción de la doctrina; en Francia, el jansenismo conectó con el galicanismo, corriente que pretendía establecer una Iglesia nacional francesa independiente de Roma. Pascal conoció las ideas de Jansenio gracias a los hermanos Deschamps, médicos que atendieron a su padre en enero de 1646, a raíz de un accidente que este tuvo al caer andando por la calle, a causa del hielo, y que le obligó a permanecer inmovilizado en su casa durante más de tres meses.

DISTINTAS CLASES DE NÚMEROS

Por lo que respecta a las cuestiones de cálculo aritmético que preocupaban a Pascal, cabe decir que el siglo XVII fue un período clave para el desarrollo de su metodología, puesto que en muy pocos años tuvieron lugar tres descubrimientos fundamentales para permitir mejoras muy importantes en este campo: la creación de las tablas de logaritmos, la construcción de las primeras reglas de cálculo y el diseño de las primeras máquinas de calcular mecánicas.

Durante el siglo XVI, los avances fundamentales se dieron en el campo del álgebra, que tuvo un gran desarrollo gracias a los llamados algebristas italianos, entre otros: Scipione del Ferro (1465-1526), Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1557), Gerolamo Cardano (1501-1576) y Raffaele Bombelli (1526-1572), que además de resolver las ecuaciones de tercer y cuarto grado introdujeron distintos tipos de números, como los enteros y, sobre todo, los números imaginarios. Sin embargo, la interpretación de los diferentes tipos de números como entidades independientes, más allá de los números racionales positivos, es algo que llevó mucho tiempo.

Los números negativos no eran aceptados como tales por muchos matemáticos de los siglos XVI y XVII, y en todo caso nunca como solución de ecuaciones. Eran frecuentes los argumentos que trataban de mostrar la absurdidad de los números negativos, como el que presentó Antoine Arnauld (1612-1694), matemático y teólogo amigo de Pascal. Arnauld cuestionaba la igualdad: $-1:1=1:-1$, argumentando que no podían ser iguales dos razones si en una de ellas el numerador era mayor al denominador mientras que en la otra sucedía lo contrario. En 1712, Leibniz todavía aceptaba la validez de esta objeción, pero decía que era posible calcular con estas proporciones, de la misma forma que se hace con los números imaginarios.

Algo similar sucedía con los números irracionales, cuya representación en notación decimal —como un número con infinitas cifras no periódico— acababa de ser establecida. Tanto Pascal como el matemático británico Isaac Barrow (1630-1677) consideraban que un número como raíz de 3, solo puede entenderse como una magnitud geométrica, por lo que su opuesto, –raíz de 3, no tiene sentido. Algo parecido expresaría más tarde Newton en su *Arithmetica universalis* (1707).

Todavía más difícil era la aceptación de los que actualmente se conocen como «números complejos», y que aparecían como soluciones de ecuaciones. En el siglo XVI, Bombelli ya los utilizaba de manera natural, y algo similar hacía un tiempo después el matemático francés Albert Girard (1595-1632). Sin embargo, a lo largo del siglo XVII se les plantearon numerosas objeciones: una de las más explícitas fue formulada por Descartes en *La geometría* (1637),

donde se leía: «Ni las raíces verdaderas ni las falsas [se refería a las negativas] son siempre reales; a veces son imaginarias». Así, razonaba el filósofo y matemático que, mientras las raíces negativas al menos pueden hacerse reales, transformando la ecuación en otra que tenga las raíces positivas, este paso no puede hacerse con las raíces que son números complejos. Estas, por tanto, no son reales sino imaginarias. En definitiva, no son números.

«Esta invención [la máquina de calcular] fue considerada una cosa nueva en la naturaleza, ya que reduce a mecanismo una ciencia que reside íntegramente en la mente.»

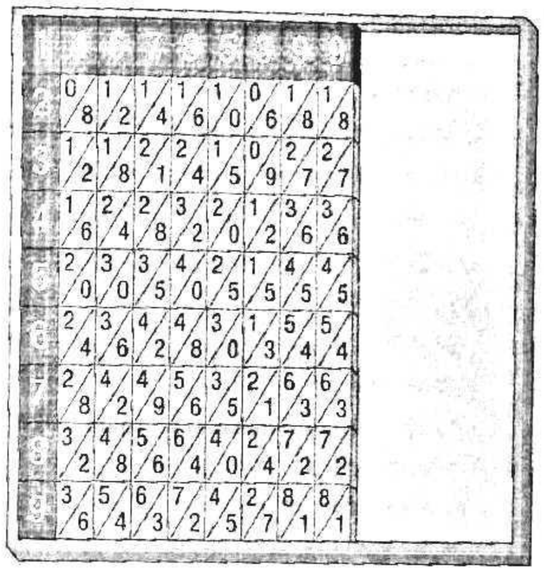
— **Gilberte Périer.**

Sin embargo, todos estos obstáculos de carácter conceptual no impedían la realización de cálculos y el establecimiento de reglas para operar con los distintos tipos de números, algo que realizaban la mayoría de los matemáticos fueran cuales fuesen sus concepciones. En este sentido, Pascal no fue distinto, aunque el problema no le interesara especialmente. En efecto, Pascal no tuvo gran curiosidad por el álgebra ni por la mejora de los aspectos simbólicos de las matemáticas; así pues, parece normal que en algunas cuestiones relativas a los números tuviera posiciones reticentes que otros contemporáneos suyos ya habían superado.

LOS ORÍGENES DEL CÁLCULO MECÁNICO

Los más antiguos instrumentos para ayudar a la realización de cálculos numéricos fueron los ábacos, aún usados en la actualidad, cuyo origen se remonta a varios milenios atrás. Aunque no puede pasarse por alto el uso de los dedos de las manos, cuya cantidad total nos remite de manera directa al sistema de numeración decimal, el cual, con carácter aditivo (es decir, todavía no posicional), ya era utilizado por los antiguos egipcios. Una versión moderna de este instrumento es el ábaco neperiano, diseñado por el aristócrata escocés John Napier (1550-1617).

LOS «HUESOS» DE NAPIER



La preocupación principal de John Napier en el ámbito de las matemáticas fue la de mejorar y facilitar los métodos de cálculo. Por ello Napier se interesó tanto por conceptos teóricos, como los logaritmos, como por cuestiones de notación de los números decimales, y también en artilugios para facilitar la realización de cálculos. Su contribución principal a las matemáticas es la de haber ideado los logaritmos, paralelamente a Henry Briggs (1561-1630). En relación con los instrumentos para mejorar la realización de cálculos, en 1617, último año de su vida, se publicó la obra *Rabdologiae*, donde se describen los «huesos de Napier». El instrumento en sí consta de una colección de regletas—construidas sobre hueso, de aquí su nombre— que permiten realizar multiplicaciones y divisiones, reduciéndolas a sumas y restas respectivamente; en la parte superior de cada una hay un número de una cifra y debajo el resultado de multiplicar este número por los sucesivos números naturales, hasta el nueve (como si se escribiera la tabla de multiplicar de este número). Cada número se escribe con dos cifras separadas por una diagonal (de arriba a la derecha hasta abajo a la izquierda). Así, debajo del 7 está 0/7, debajo 1/4, después 2/1 y así sucesivamente.

La imagen muestra cómo hacer el producto: 46785399 x 7. En un rectángulo, que hace de tablero, se ponen las regletas que corresponden al multiplicando (4, 6, 7, 8, 5, 3, 9, 9). Luego se construye el producto en la fila que corresponde al 7 (multiplicador) de la siguiente manera: la cifra de las unidades será el 3 (de 9 x 7 = 63); las decenas se obtienen sumando el 6 (decenas del primer número) con el 3, las unidades del segundo; y así sucesivamente, teniendo en cuenta que si al sumar se alcanza o supera 10, habrá que sumar una unidad a la siguiente suma (por ejemplo, a la izquierda del resultado anterior, al sumar 8+4 se pone 2 y luego se suma 1 al 2, de modo que la primera cifra del resultado será 3.

La facilidad para realizar cálculos depende en gran medida del sistema de numeración empleado; por ejemplo, es muy difícil, por no decir imposible, operar directamente con números expresados en un sistema como el romano; en cambio, el sistema de numeración posicional decimal, introducido en el siglo XIX, permite construir algoritmos para operar con papel y lápiz, de manera bastante rápida y eficaz. Sin embargo, cuando los sistemas de medidas no son decimales (por ejemplo, las medidas del tiempo o de los ángulos), los cambios de unidades requieren cálculos bastante tediosos y necesarios para la resolución de los problemas de la práctica.

Más allá de los ábacos, en la Antigüedad ya eran conocidos otros instrumentos que podrían considerarse como calculadores analógicos, caso del astrolabio griego (siglo II a.C.), y también en la época medieval, principalmente desarrollados por los árabes, como el planisferio del persa Al Biruni (973-1048) y el astrolabio universal, independiente de la latitud, del andalusí Azarquiel (Al Zarqali, 1029-1087), construidos ambos en el siglo XI. También en la misma época, Su Song (1020-1101), ingeniero, poeta y embajador chino, construyó una espectacular torre-reloj que funcionaba con mecanismos hidráulicos. Todos estos instrumentos fueron ideados para realizar medidas y también cálculos astronómicos.

Tuvieron que pasar muchos años para que, en el siglo XVII, una época particularmente importante para el desarrollo de nuevos métodos de cálculo, aparecieran las que podrían llamarse propiamente «calculadoras». Una calculadora mecánica es una máquina cuya función consiste en realizar cálculos aritméticos con números grandes, por lo general con las operaciones elementales, y cuyo funcionamiento es básicamente mecánico. Este tipo de máquina se conoce también como máquina aritmética, nombre utilizado por Pascal desde que en 1642 inició la construcción de la primera de ellas, y así fueron denominadas durante los siglos XVII y XVIII. Más adelante se adoptó el nombre de máquina de calcular, que prevaleció hasta 1961, cuando se presentó la primera calculadora totalmente electrónica; desde entonces se utiliza el término «calculadora mecánica» para diferenciar las máquinas mecánicas de las electrónicas.

LA *PASCALINA*, PRIMERA MÁQUINA MECÁNICA PARA CALCULAR

En 1642, Pascal empezó a trabajar en la *pascalina*, considerada la primera máquina mecánica de calcular, aunque el alemán Wilhelm Schickard (1592-1635) había diseñado una en 1623 que nunca llegó a funcionar.

«Pascal, este loco sublime que nació un siglo demasiado pronto.»

— VOLTAIRE.

Después de tres años de labor, el francés dio a conocer un prototipo en 1645, y en 1649 obtuvo lo que sería el equivalente a una patente actual, gracias a un privilegio real, promulgado por Luis XIV, que le daba la exclusividad en la producción de dichas máquinas en Francia. A lo largo de esa década, Pascal construyó alrededor de veinte aparatos, de los que cerca de la mitad han llegado a nuestros días.

Hay que tener en cuenta que, más allá del diseño de la máquina, los problemas técnicos para la construcción efectiva de la máquina fueron múltiples. Al inicio, Pascal recurrió a un relojero de Ruan, autor de un primer prototipo que no llegó a funcionar. Tras este fracaso decidió involucrarse él mismo; al parecer, incluso construiría algunas piezas. La tarea culminó en 1645, con la construcción efectiva de un prototipo. A partir de ese momento se fabricaron varios aparatos, que fueron vendidos al precio de cien libras —suma importante para la época— en casa del matemático francés Gilles de Roberval (1602-1675).

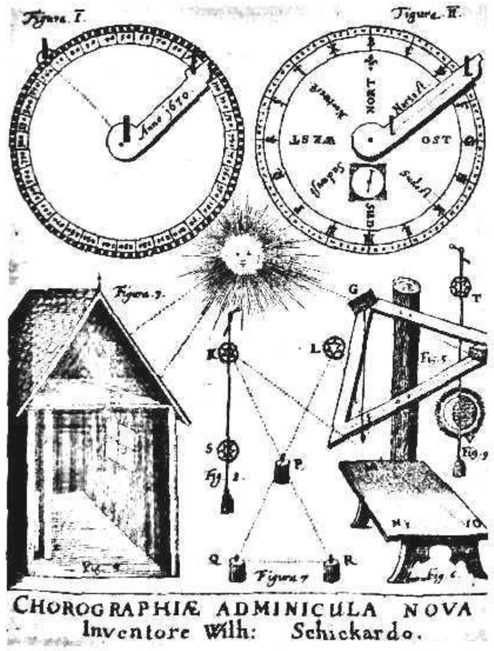
Para promocionar su calculadora, Pascal envió un ejemplar a la reina Cristina de Suecia (1626-1689), una de las grandes mecenas de la época, muy interesada por los temas científicos y filosóficos, y que tuvo en su corte a Descartes, entre otras personalidades del saber de la época. De acuerdo con la carta que acompañaba a la máquina que viajó a tierras suecas, Pascal adjuntó también un conjunto detallado de instrucciones para su uso, que por desgracia se han perdido.

EL PRIMER DISEÑO DE UNA MÁQUINA MECÁNICA PARA CALCULAR

Aunque la primera máquina de calcular que llegó a funcionar fue la *pascalina*, unos años antes, el pastor luterano alemán Wilhelm Schickard (1592-1635) había diseñado un aparato similar que, sin embargo, nunca llegó a construir, por lo que puede considerarse este diseño como el precursor de la máquina de Pascal. Schickard fue un personaje interesante y polifacético, ya que tuvo intereses muy distintos: estudió matemáticas, teología y lenguas orientales en la Universidad de Tubinga (Alemania) y ejerció como pastor de la Iglesia luterana durante seis años, para luego ejercer como profesor universitario, primero de hebreo y doce años más tarde de astronomía, también en Tubinga. Sus áreas principales de investigación incluían la astronomía, las matemáticas, la cartografía y la topografía.

Un reloj para hacer cálculos

En una carta de septiembre de 1623 enviada por Schickard a Kepler, con el cual mantenía frecuentes contactos, refería el diseño de una máquina de calcular, llamada por su autor «reloj de cálculo», que realizaba todas las operaciones aritméticas con números de hasta seis cifras. Este aparato se basaba en el movimiento de seis ruedas dentadas que se engranaban a una rueda «mutilada», la cual permitía, por cada vuelta completa, que la rueda a su izquierda diera un décimo de una vuelta. Schickard mandó construir un prototipo de su máquina, destruido por un incendio antes de su finalización. En 1960, más de tres siglos después, Bruno von Freytag Löringhoff (1912-1996), profesor de matemáticas de Tubinga, construyó una réplica de la máquina y constató que las indicaciones dadas por su creador no eran correctas, al detectar que el mecanismo de propagación no podía funcionar. Una vez corregido el error, la máquina llegó a funcionar utilizando un mecanismo distinto al de la *pascalina*. En la actualidad, el instituto de informática de la Universidad de Tubinga lleva el nombre de Wilhelm-Schickard Institut für Informatik.



Esquema de un cronógrafo inventado por Wilhem Schickard.

Gracias a una entrada de la célebre *Enciclopedie*, recopilación de los saberes del siglo XVIII editada a partir de 1750, se sabe cómo había que realizar la adición y la sustracción, y que la multiplicación consistía en sumas sucesivas, y la división en restas, de modo que no era posible efectuarlas automáticamente con la máquina. Tampoco se especifica cómo poner a cero el totalizador para realizar una nueva operación, algo que no era trivial.

Desde el punto de vista comercial, la calculadora fue un fracaso, sin duda por las dificultades técnicas para la construcción de cada ejemplar, y existen indicios de que Pascal estuvo tratando de hacer una máquina más simple para facilitar su venta, algo que nunca consiguió.

LOS TIPOS DE MÁQUINAS Y SU FUNCIONAMIENTO

Dado que la unificación del sistema de pesas y medidas y valores monetarios, así como su paso al uso generalizado del sistema decimal, no se produciría hasta muchos años más tarde, no todas las máquinas de calcular eran iguales, dependiendo del que sería su uso principal y también de su capacidad de cálculo, que oscilaba entre números de cinco a diez cifras.

De entre los instrumentos construidos por Pascal cabe distinguir, por lo menos, tres tipos de máquinas según su finalidad: las decimales, destinadas a los cálculos en el sistema decimal; las contables, para realizar cálculos con dinero, y que tenían en cuenta las relaciones entre los distintos valores monetarios de la época, que no mantenían una relación decimal, y las máquinas para estudios topográficos, que consideraban las relaciones entre las unidades de longitud (yardas, pies, pulgadas).

En la actualidad pueden verse cuatro de esas máquinas en el Museo de Artes y Oficios de París (dos decimales y dos contables), dos en el Museo Lecocq de Clermont Ferrand (una decimal y una contable) y otras dos contables, una en Dresde (Alemania) y otra en la colección de IBM (Estados Unidos). La única conservada del tipo topográfico pertenece a una colección particular.

Aunque se tratara de una máquina simple que solo realizaba sumas y restas, su mecanismo estaría en la base de las futuras máquinas calculadoras, en particular la que construyó Leibniz en 1672, que ya realizaba las cuatro operaciones elementales y que el propio filósofo y matemático alemán consideraba como una mejora de la *pascalina*.

En relación al funcionamiento de la máquina, cabe señalar que la *pascalina* se sirve de un conjunto de ruedas para representar las unidades de distinto orden, hasta las centenas de millar. Para sumar dos números hay que introducirlos sucesivamente, cifra a cifra empezando por las unidades, y el resultado se lee en un totalizador (ventana situada en la parte superior de la máquina). La parte más delicada e interesante es la que permite transformar diez unidades de un cierto orden, en una unidad de orden superior. Pascal diseñó un «saltador», también llamado «puente», que permitía avanzar un diente del engranaje de la izquierda por cada vuelta que daba una determinada rueda; este sistema permitía que las ruedas fueran independientes, si bien permanecieran conectadas a través de dicho saltador.

A efectos matemáticos, la realización de la suma en la *pascalina* no tiene ningún interés especial, ya que se trata de añadir una cantidad a otra previamente introducida. Podría pensarse que para restar hay que realizar un proceso inverso (es decir, quitar una cantidad a una dada), pero esto implicaría utilizar el puente al revés, algo que técnicamente no era posible, ya que este mecanismo fue diseñado de modo que no giraba las ruedas a la inversa (algo que sí harían más tarde otras máquinas). Ante este pequeño problema, para realizar una sustracción se recurre al concepto de complementario de un número con respecto a otro mayor, que consiste en transformar la resta en una suma, teniendo en cuenta el número de cifras del sustraendo. Así, para restar a – b, se hace lo siguiente:

Si b tiene una cifra:	$a-b = a + (9-b) - 10 + 1$
Si b tiene dos cifras:	$a-b = a + (99-b) - 100 + 1$
Si b tiene tres cifras:	$a-b = a + (999-b) - 1\,000 + 1$

Así, por ejemplo, para restar 762 – 287, se calcula el complementario de 287 a 999, que es 712 (la máquina tiene una doble tabla

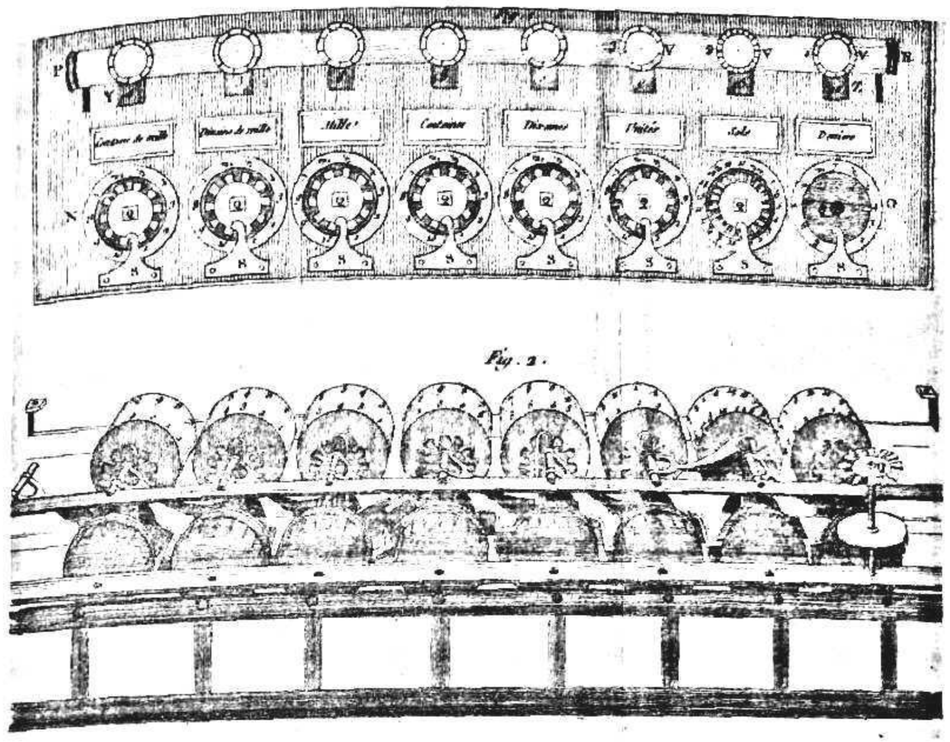


FOTO SUPERIOR:
Ilustración que muestra el diseño de los engranajes interiores de la *pascalina*.

FOTO INFERIOR:
Ejemplar de *pascalina* depositado en el Museo de Artes y Oficios de París.

que empareja las cifras para facilitar este cálculo: 0-9, 1-8, 2-7) y se suma, utilizando la calculadora: 762 + 712 = 1474. A continuación, basta con restar 1000 y sumar 1 (operación que se reduce a disminuir en una unidad la cifra de la izquierda y aumentar en una unidad la cifra de la derecha). Obsérvese que con esta manera de restar se evita la problemática de tener que *llevarse* unidades (una cuando se resta entre 10 y 19, dos desde 20 a 29, etc.).

«Las luces de la geometría, de la física y de la mecánica me proporcionaron lo necesario para su diseño.»

— PASCAL, A PROPÓSITO DE SU MÁQUINA DE CALCULAR.

Un mecanismo parecido es el que se utiliza para poner el totalizador a cero cuando se quiera realizar una nueva operación, teniendo que calcular mentalmente el complemento a 9 para la calculadora decimal, o bien a 19 para los soles y a 11 para los deniers, en el caso de las calculadoras llamadas contables.

LA EVOLUCIÓN DE LA *PASCALINA*

La importancia de la máquina de calcular de Pascal fue apreciada desde su inicio, no solo por sus más allegados sino por la comunidad matemática en general. Pero, sin duda, la principal valoración del instrumento vino de la mano de Leibniz, quien no solo se interesó por ella sino que, en cuanto tuvo conocimiento de la misma, hacia 1671, inició los trabajos para mejorarla, con la idea de que pudiera realizar también multiplicaciones y divisiones de manera automática, además de adiciones y sustracciones.

Para ello, Leibniz ideó un nuevo mecanismo en forma de tambor cilíndrico, conocido como «rueda escalada de Leibniz», que permitía, mediante su movimiento en la dirección del eje del cilin-

CHARLES BABBAGE

En la historia de los instrumentos para la realización de cálculos aritméticos hay ciertos momentos clave. Uno de ellos fue la construcción de la *pascalina*; otro se debió al matemático inglés Charles Babbage (1791-1871), el auténtico y visionario precursor de la informática y el cálculo digital. Babbage estudió matemáticas en Cambridge, donde fue profesor (1728-1739). Interesado por la construcción de tablas numéricas (como las logarítmicas o las trigonométricas) y por las calculadoras que habían construido Pascal y Leibniz, en 1819 empezó a diseñar la que denominaría «máquina diferencial», cuya función sería la de computar polinomios utilizando un método numérico conocido como método de las diferencias. En 1822, la Royal Astronomic Society le concedió la medalla de la sociedad y un presupuesto para construir la máquina, al entender que sus resultados ahorrarían mucho trabajo para realizar

El matemático británico Charles Babbage, retratado por Samuel Laurence en 1845.

tablas numéricas de todo tipo, que hasta entonces realizaban un grupo de calculadores con métodos poco efectivos. Dos problemas impidieron su construcción real: por un lado, los problemas técnicos de desgaste de los materiales a causa de la fricción que impedía el buen funcionamiento de los engranajes; por otro, el propio carácter de Babbage. En 1830 se detuvo definitivamente el proyecto.

Una nueva máquina

En 1834, Babbage comenzó a diseñar la que llamó la «máquina analítica». Para que fuera capaz de realizar cualquier tipo de cálculo, planeó el uso de tarjetas perforadas que permitieran seleccionar las acciones a efectuar. La integraban los dispositivos de entrada (las tarjetas perforadas), un procesador aritmético para realizar cálculos con números, una unidad de control, un mecanismo de salida y una memoria para almacenar los resultados obtenidos. A pesar de que esta máquina tampoco llegó a construirse, se trataba del primer diseño de un ordenador, realizado un siglo antes que estos empezaran su andadura. Ada Lovelace (1815-1852), hija de Lord Byron y excelente matemática, se interesó por los trabajos de Babbage y llegó a escribir varios programas para ella. En ellos se utilizan por primera vez instrucciones condicionales y también iterativas, que son la base de la programación actual. Por ello se considera a Ada Lovelace la primera programadora de computadoras de la historia.

dro, mover otro engranaje de manera variable, con lo cual trataba de resolver el problema de la multiplicación cuando el multiplicador es un número de varias cifras. Esta máquina, llamada «la calculadora universal» por el hecho de realizar las cuatro operaciones (e incluso raíces cuadradas), fue, sin embargo, mucho menos efectiva que la de Pascal. Al parecer, Leibniz solo llegó a construir dos ejemplares, uno hacia 1694 y otro ya entrado el siglo XVIII, y solo uno de ellos ha pervivido y se encuentra en la Niedersächsische Landesbibliothek de Hanover (Alemania). Un estudio de este aparato, realizado en 1893, mostró que en algunos casos, cuando el multiplicador tiene tres o más cifras, se producen algunos errores.

Sin embargo, la idea del cilindro de Leibniz fue perfeccionada y está en la base del funcionamiento de muchas calculadoras mecánicas posteriores, en particular de las desarrolladas a lo largo del siglo XVIII. Sin embargo, ninguna de las máquinas construidas durante esa centuria ni la anterior llegaron a tener éxito comercial, a causa de la dificultad de su construcción y el elevado precio; hubo que esperar a la segunda mitad del siglo XIX para encontrar máquinas que fueron fabricadas en serie y vendidas en cantidades importantes. La primera de ellas fue el aritmómetro del francés Charles Xavier Thomas de Colmar (1785-1870), cuya fabricación en serie se inició en 1851 y permaneció en el mercado hasta entrado el siglo XX.

Hay que constatar de nuevo las dificultades técnicas para construir calculadoras mecánicas, para concluir que la máquina de Pascal fue la única del siglo XVII de la que se llegaron a fabricar numerosos ejemplares y que funcionó de manera real.

CAPÍTULO 3

Pascal y la física

Al margen de sus contribuciones como matemático, Blaise Pascal realizó también importantes trabajos en el campo de la física. Ante la negativa del filósofo y matemático francés René Descartes a reconocer la posibilidad del vacío —sustentada en el llamado «mito del *horror vacui*»—, llevó a cabo experimentos esenciales para probar su existencia, en particular el conocido como «la gran experiencia del Puy-de-Dôme».

El filósofo francés Jacques Chevalier (1882-1962), en su edición de las obras completas de Pascal (Biblioteca de La Pléiade, París, 1954), escribió a propósito de los trabajos sobre las ciencias experimentales: «la obra sobre física de Pascal es un exponente de su genio. Esta obra, de la cual podríamos decir que inaugura el método de la ciencia experimental, está vinculada a sus pensamientos más profundos y se une a ellos a través de unos lazos tan íntimos, que sería difícil separar una de otros». Estos pensamientos profundos se refieren a los temas recurrentes que Pascal abordó a lo largo de su vida desde perspectivas diferentes, y que son: el vacío (o la nada), el infinito, el hombre y el verdadero lugar de este entre aquellos dos polos.

El período comprendido entre los años 1646 y 1651 fue el más importante para sus trabajos de física, ya que en ese tiempo realizó diversos experimentos con el tubo barométrico, recién creado por el físico y matemático italiano Evangelista Torricelli (1608-1647), y escribió la mayor parte de sus obras relacionadas con esta ciencia. El conjunto de trabajos principales para poder analizar la obra científica de Pascal son:

Experiences nouvelles touchant le vide (1647), después de haber reproducido en 1646 los experimentos de Torricelli; la respuesta a la carta del padre Noël (1647), donde polemizó sobre el vacío; el conjunto de escritos a propósito del experimento del Puy-

de-Dôme (la carta a Florin Périer, el marido de su hermana Jacqueline, del 15 de noviembre de 1647, donde le proponía realizar «*la grande expérience de l'equilibre des liqueurs*», y la explicación detallada de la experiencia redactada por Périer entre septiembre-octubre de 1648); los tratados *De l'equilibre des liqueurs* y *De la pesanteur de la masse d'air*, publicados póstumamente en 1663, y el *Preface pour le traité du vide*, testimonio de un proyecto inacabado sobre el tema del vacío.

SOBRE EL PESO DEL AIRE Y LA EXISTENCIA DEL VACÍO

Hasta 1647, la familia Pascal había vivido en Ruan debido al trabajo paterno. Fue en este tiempo cuando el filósofo y matemático se interesó por cuestiones de física. Con la colaboración de su padre realizó los primeros experimentos sobre la presión atmosférica.

En 1647, de nuevo en París con su hermana Jacqueline y tras pasar una temporada indispuesto, Pascal tuvo un encuentro con Descartes (septiembre), que salió de su retiro en el norte de los Países Bajos para visitar la capital francesa. Fue la única ocasión en que se trataron y tuvo lugar durante dos días consecutivos. Discutieron sobre la existencia del vacío y los experimentos de física del Puy-de-Dôme.

PASCAL FRENTE A DESCARTES

Descartes fue llamado para que opinara sobre las graves dolencias de Pascal y le prescribiera algunos remedios para paliarlas, por lo que el encuentro tuvo lugar en la casa de Pascal, donde este guardaba cama. Por aquel entonces, Descartes contaba 51 años —Pascal era todavía un joven de 24 años— y estaba considerado como el más eminente matemático y filósofo de su época.

El encuentro del primer día coincidió con una visita inesperada del matemático francés Gilles de Roverbal (1602-1675), un declarado anticartesiano; también estaba presente Jacqueline Pascal. La conversación giró alrededor de diversos temas, en general más filosóficos que científicos, pero en todo caso no pudieron hablar a solas y las injerencias de Roverbal hicieron que la velada no fuera muy agradable. Al día siguiente, Descartes volvió y fue entonces cuando departieron los dos solos sobre diversos temas, en particular sobre la existencia del vacío; a pesar de las desavenencias, el encuentro transcurrió en un ambiente cordial.

A pesar de los desencuentros y disputas con Descartes, lo cierto es que Pascal le tenía en gran consideración y siempre conservó un grato recuerdo de aquella visita. También Descartes quedó impresionado por los trabajos de Pascal, en particular la máquina de calcular, cuyo funcionamiento pudo comprobar. Después de este encuentro, Pascal se procuró diversos trabajos publicados de Descartes para estudiarlos en profundidad. Aunque sus opiniones seguirían siendo opuestas, fue el racionalista supremo en su papel de médico amable al que Pascal recordaría más tarde, y el que pudo haber estado en su mente cuando afirmó: «El corazón tiene razones que la razón no conoce». Meses después, la familia Pascal (Étienne, Blaise y Jacqueline) dejó de nuevo París durante la guerra civil conocida con el nombre de la Fronda (una revuelta de origen nobiliario acaecida en 1648), pero volvieron a la capital al final del mismo año. Tras la guerra, las tareas de Étienne en Ruan finalizaron. Fue entonces cuando Jacqueline expresó su deseo de hacerse monja. Sin embargo, postergó la decisión hasta 1651, pocos meses después de la muerte del padre; a pesar de la oposición de su hermano, ingresó en el convento de Port Royal para unirse a los jansenistas.

EL PESO DEL AIRE

Como señala la *Historia general de las ciencias* dirigida por el francés René Taton (1915-2004), corresponde a Pascal el honor de haber relacionado el peso del aire (como se denominaba en esa época a la presión atmosférica) con la eliminación del mito del *horror vacui*, expresión latina que significa «miedo al vacío». Este

mito, defendido ya por los seguidores de Aristóteles (filósofo griego del siglo IV a.C.), fue una de las cuestiones relevantes que se discutieron en el siglo XVII, y provocó una de las diversas disputas entre Descartes y Pascal.

Pascal no fue el primero en referirse al peso del aire como fenómeno independiente de la existencia del vacío. Al parecer, la referencia más antigua se debe a un filósofo y místico medieval alemán, Nicolás de Cusa (1401-1464), aunque el primero en constatar su experiencia fue el matemático italiano Gerolamo Cardano (1501-1576), quien afirmó que el aire era cincuenta veces menos pesado que el agua. Sin embargo, las diversas teorías que defendían esta u otras posiciones eran todavía muy débiles.

«A los 23 años, después de conocer el experimento de Torricelli, inventó y llevó a cabo «la experiencia del vacío» que demuestra con bastante claridad que todos los fenómenos hasta ahora atribuidos al vacío están causados por el peso del aire.»

— GILBERTE PÉRIER, HERMANA DE BLAISE PASCAL.

Teorías más consistentes surgieron ya en el siglo XVII. Galileo afirmaba que el aire pesa, aunque sus experimentos proporcionaron una densidad del aire muy lejana a la real; de otro lado, admitía que las resistencias a la existencia del vacío eran limitadas. El padre Mersenne, también interesado por la temática, calculó una densidad del aire mil novecientas veces menor a la del agua, pero en ninguno de estos casos se establecía una relación entre el peso del aire y la existencia del vacío. Finalmente, en 1643, Torricelli creó el barómetro (un tubo cerrado por uno de los lados), y realizó con él la experiencia de llenarlo de mercurio, invertirlo y sumergirlo en una cubeta que también contenía mercurio. Constató que la columna de mercurio, después de descender un poco, se mantenía elevada y consideró que esto se producía a causa del «peso del aire». Por otra parte, al bajar ligeramente la columna de mercurio se generaba un espacio vacío en la parte superior del tubo. Es en este marco donde deben encuadrarse los experimentos de Pascal.

LOS TRABAJOS DE TORRICELLI

Evangelista Torricelli fue enviado a Roma a estudiar con Benedetto Castelli (1579-1645). Fueron los *Dialoghi delle nuove scienze* de Galileo los que inspiraron a Torricelli su obra *De motu*, en la que propuso nuevos principios sobre mecánica. Galileo aceptó a Torricelli como su ayudante en 1641 y compartió con él los últimos meses de su vida en Arcetri. Poco después, Torricelli fue nombrado filósofo y matemático del duque de Médicis, Fernando II, y al mismo tiempo profesor de matemáticas de la Academia de Florencia, ciudad donde permaneció hasta su muerte prematura en 1647.

Retrato de Evangelista Torricellie en el frontispicio de una edición de su obra *Lezioni accademiche d'Evangelista Torricelli.*

Una gran labor científica

En 1643, después de construir un tubo barométrico y llenarlo de mercurio, logró medir la presión atmosférica por primera vez. Torricelli expresó su gran descubrimiento con estas palabras: «Vivimos en el fondo de un océano formado por el elemento aire, el cual, mediante una incuestionable experiencia, se demuestra que tiene peso». También enunció el que después sería llamado «teorema de Torricelli», de gran importancia en hidráulica, que estudia el flujo de un líquido contenido en un recipiente, y a partir del cual es posible calcular el caudal de salida de un líquido por un orificio. Otro descubrimiento le permitió formular el principio según el cual si un conjunto de dos cuerpos están conectados de tal modo que, debido a su movimiento, su centro de gravedad no puede ascender o descender, entonces dichos cuerpos están en equilibrio. Torricelli hizo también importantes aportaciones a las matemáticas. En 1644 publicó *Opera geometrica*, un trabajo sobre el movimiento, y junto a ella varios ensayos sobre las propiedades de la cicloide, a cuenta de los cuales fue acusado de plagio por Roberval; en esta controversia, que finalizó con la muerte prematura de Torricelli, Pascal tomó partido por su amigo Roberval, aunque todo parece indicar que ambos lograron los mismos resultados sobre la cuadratura de la cicloide de manera independiente. Además, Torricelli fabricó numerosas lentes que le permitieron realizar mejoras en el telescopio de Galileo.

DE LOS EXPERIMENTOS DE RUAN AL GRAN EXPERIMENTO DEL PUY-DE-DÔME

El interés de Pascal por los experimentos relacionados con el peso del aire fue, al parecer, casual. En septiembre de 1646, el ingeniero real Pierre Petit (1598-1667) estuvo en Ruan e informó a Étienne y a Blaise Pascal sobre los experimentos realizados con mercurio por Torricelli. Tanto Blaise como su padre se interesaron de inmediato por ellos, y realizaron pruebas similares, primero en Ruan y luego en París. Comprobaron que, efectivamente, al llenar de mercurio un tubo barométrico, girarlo y sumergir la parte baja en un recipiente con mercurio, la columna de mineral experimentaba un pequeño descenso inicial, para luego mantenerse sin bajar a pesar de su considerable peso. Fruto de estos experimentos y de las correspondientes reflexiones sobre ellos fue el trabajo *Expériences nouvelles touchant le vide* (1647).

A pesar de que para Pascal el resultado de los experimentos estaba claramente relacionado con el peso del aire (es decir, que esta era la causa por la cual el mercurio no descendía en el barómetro), quiso encontrar nuevas y más fuertes evidencias, por lo que pensó en repetir la experiencia a diferentes alturas, pues así posiblemente obtendría resultados distintos. ¿Realmente existían diferencias notables causadas por la altura del lugar si, como suponía, a medida que subiera por una montaña la altura de la columna del mercurio descendería?

En Normandía, las elevaciones del terreno son muy pequeñas —la cota superior apenas descolla 400 m sobre el nivel del mar— y tampoco en París se pueden encontrar montañas importantes. Se acordó entonces de su tierra natal y pensó que se podría realizar el experimento en el Puy-de-Dôme, una montaña de origen volcánico del Macizo Central francés, de 1464 m de altitud, en la región de Auvernia. Sin embargo, su siempre maltrecha salud, que en aquel momento era especialmente mala, no le permitió desplazarse para realizar su experimento, pero tuvo la suerte de poder convencer a Florin Périer para que se involucrara en los trabajos y realizara físicamente la prueba.

Lo remarcable de este experimento es el proceso, digno de un científico moderno, que realizó Pascal desde sus experimentos iniciales de 1646 y las reflexiones de 1647. Para que los experimentos adquirieran autoridad, concibió una serie de variaciones de las condiciones experimentales: la naturaleza del líquido, la inclinación y la forma del tubo. Una vez aplicadas, constataría que, para un cierto líquido, la altura (vertical) entre los dos niveles (el del tubo y el de la vasija donde aquel estaba sumergido) era siempre la misma. Por otro lado, también verificó que, para dos líquidos distintos, las alturas están en proporción a los volúmenes de sus masas. Todos estos resultados, el último de los cuales ya había sido previsto por Torricelli y verificado por su amigo Michelangelo Ricci (1619-1682), quedaron expuestos en las *Experiences nouvelles touchant le vide*.

El experimento del Puy-de-Dôme tuvo lugar el 19 de septiembre de 1648. Périer colocó un tubo barométrico junto al monasterio de Saint-Pierre des Minimes, que se encuentra al pie de la montaña, lo llenó de mercurio y dejó encargado a un ayudante local para que registrara cualquier variación que se produjera durante la jornada en la altura de la columna de mercurio. Luego, con otro barómetro subió a la cima de la montaña y tomó registro de la altura de mercurio. En el descenso hizo lo mismo en dos puntos intermedios. Como Pascal suponía, la altura de la columna variaba de manera inversa a la altitud (con respecto al nivel del mar) del lugar donde se colocaba el tubo barométrico. Una vez finalizado el descenso, comprobaron que ambos barómetros señalaban lo mismo.

En concreto, Périer registró que, en la cima, la columna de mercurio era menor en «tres pulgadas y una línea y media» (distancia equivalente a unos 85 mm) que al pie de la montaña. Por su parte, el ayudante que había estado toda la jornada con el barómetro al pie de la montaña contó que la altura de mercurio no había variado durante la realización del experimento, «a par del hecho que el tiempo era cambiante, con períodos de calma, de lluvia, de niebla, y de viento». Los resultados de dicho experimento fueron publicados en 1648, bajo el título: *Recit de la grande expérience de l'équilibre des liqueurs*.

El experimento confirmaba los realizados por Torricelli y no solo predecía la existencia de la presión atmosférica, si no que permitía realizar medidas sobre dicha presión, y, sobre todo, sobre la variación de la misma al variar la altura del lugar donde se realiza la medida.

Se ha discutido si la idea inicial de la experiencia fue realmente de Pascal; lo cierto es que, después de los experimentos de Torricelli, diversos científicos se plantearon pruebas parecidas. Mersenne, por ejemplo, se refirió a ella, pero sugiriendo un resultado contrario, ya que en septiembre de 1647 escribió: «me inclino a pensar que en todas partes se obtendrá la misma altura para los cilindros de mercurio». En cualquier caso, nadie ha planteado que Pascal obtuviera la idea de Mersenne, y todo parece indicar que este se planteó la cuestión pero sin llegar a resolverla. Este fracaso coincidiría con la opinión que Pascal tenía de Mersenne, de quien dijo: «Tiene un talento muy especial para plantear bonitas cuestiones, pero no tiene el mismo para resolverlas».

Algo distinto sucedió con Descartes, quien, en una de sus cartas, reivindicó la paternidad de la idea y afirmó habérsela contado a Pascal, algo que, si de verdad fue así, debió suceder en la entrevista que mantuvieron los dos en casa de la familia Pascal. Un comentario de Jacqueline, la hermana de Blaise, da a entender que ambos hablaron sobre la cuestión, aunque sin aclararla, en el sentido de quién hizo la propuesta y cuáles eran las hipótesis barajadas.

En todo caso, la importancia del experimento de Pascal está fuera de duda, así como el mérito y la originalidad de haber prescrito todos los detalles del mismo con una minuciosa precisión. Él mismo afirmó, en una carta de 1651: «Esta experiencia es de mi invención, por lo que puedo decir que los nuevos conocimientos que nos ha proporcionado, son enteramente míos».

El interés por confirmar los resultados de la experiencia hicieron que esta se repitiese varias veces: el propio Périer lo hizo al día siguiente, entre el pie y la cima de la catedral de Clermont-Ferrand. Un tiempo más tarde, Pascal la repitió en Paris, entre el pie y la cima de la torre de Saint Jacques, después de haber calculado que la diferencia de alturas entre estos dos puntos era suficiente.

EL *HORROR VACUI* Y LA EXISTENCIA DEL VACÍO

El experimento del Puy-de-Dôme, después de los realizados anteriormente por Torricelli y por el propio Pascal, sirvió para que la mayoría de los científicos aceptaran la hipótesis del peso del aire (es decir, de la presión atmosférica), pero no sucedió lo mismo con la aceptación de la existencia del vacío, que Pascal consideraba probada, puesto que argumentaba que en la parte superior del barómetro, cuando el mercurio descendía hasta quedar frenado por el peso del aire, se creaba un espacio que no contenía ninguna materia, el vacío.

> «Hay la misma diferencia entre la nada y el espacio vacío, que entre este y un cuerpo material, de modo que el vacío está en el punto medio entre la materia y la nada.»
>
> — Blaise Pascal, carta a Étienne Noël.

Desde hacía mucho tiempo coexistían en el pensamiento occidental dos posturas sobre el concepto de espacio. Por un lado, una concepción relativa del mismo, cuyo origen se remonta a Aristóteles, pasando por la ciencia medieval hasta llegar a Descartes, según la cual no puede existir espacio sin materia, porque materia significa extensión, y sin extensión no hay espacio; por ello, el vacío no puede existir. De otra parte, y desde el inicio de la Edad Moderna (a mediados del siglo xv), muchos científicos aceptaban una concepción absoluta de espacio, que ya había defendido otro filósofo griego de la Antigüedad, Platón (ca. 427-347 a.C.), y según la cual el espacio era algo separado y distinto de la materia y, por lo tanto, su existencia era independiente de aquella. Esta era la posición de Pascal, que entendía el vacío como «un espacio que tiene longitud, anchura y profundidad, inmóvil y susceptible de contener un cuerpo de igual longitud y forma; [...] y es aquello que en geometría, en la que solo se consideran entidades abstractas, llamamos sólido».

Pocos años antes, en 1630, el matemático y físico genovés Giovanni Battista Baliani (1582-1666) escribió a Galileo las siguien-

tes palabras: «No soy más de la opinión común de que no hay vacío [...] y francamente, empecé a pensar que el vacío era posible, de manera natural, en el mismo momento que reconocí que el aire tenía un peso sensible». Esta es la única referencia conocida, anterior a Pascal, sobre la conexión entre el peso del aire y el vacío y aunque Baliani siguió dando argumentos a Galileo, este mencionaría las cuestiones en sus *Discursos* de 1638, pero sin referirse a la relación entre ambas cosas.

El problema que se planteaba no atañía tan solo a la existencia del vacío, sino a la relevancia de los experimentos científicos de la época y las evidencias empíricas que se extraían de ellos. En este sentido, los argumentos experimentales de Pascal eran refutados por los relativistas, que consideraban imposible detectar de manera empírica la existencia del vacío, al no tener este ninguna propiedad perceptible. Por su parte, Pascal consideraba que lo que no podía existir era la sustancia cuya presencia defendían sus detractores, el éter aristotélico (una materia sutil que ocupa el universo supralunar), ya que no era observable de ninguna manera y, por lo tanto, solo estaba presente «en la imaginación» de aquellos que creían en ella. Así, llegaba a la conclusión de que «hay un espacio vacío mientras no se me demuestre que hay una materia que lo llena».

La polémica ha perdurado en las crónicas gracias a la agria correspondencia que sostuvieron Pascal y el padre Noël, un jesuita que había sido profesor de Descartes. El padre Noël, hombre de ideas conservadoras, apelaba a una concepción de la naturaleza basada en los cuatro elementos (fuego, agua, tierra y aire), para sostener que en este espacio creado en el tubo barométrico solo había vacío en apariencia, puesto que en realidad se había introducido aire o algún otro material más sutil, que habría entrado a través de los poros del cristal del barómetro. Esta posición irritaba a Pascal, que la consideraba totalmente alejada de la realidad.

Así pues, el conflicto se extendió a Descartes y, como se dijo, derivó en una cuestión metodológica fundamental para la ciencia moderna: determinar qué es lo que probaba —y qué no— un determinado experimento. Quizá lo más interesante sea que, en realidad, tanto unos como otros utilizaban argumentos similares, pues

resulta tan empíricamente indemostrable la existencia de un cuerpo sin propiedades perceptibles como un espacio vacío, que tampoco tiene cualidades acusables.

> «El universo es una esfera infinita cuyo centro está en todas partes y la circunferencia en ninguna.»
>
> — Blaise Pascal.

Entonces, lo que cada uno hacía —he aquí la similitud— era darle la vuelta al argumento contrario y señalar que si no es posible refutar la existencia de algo, significa que ese *algo* existe. Solo el tiempo acabaría dando la razón a Pascal, al mostrar que la hipótesis *ad hoc* de una materia invisible para salvaguardar el mito del horror al vacío, era similar a otras muchas que ha habido a lo largo de la historia para salvar las apariencias, como el complicado modelo de los epiciclos con que Ptolomeo defendió la inmovilidad de la Tierra en el centro del universo, o bien la existencia de una capa lisa y esférica que cubriría la Luna, para no aceptar que esta tenía una superficie rugosa, como había observado Galileo.

Sin embargo, había una diferencia muy importante entre el modo de razonar de Pascal y de Descartes. La posición del primero se acercaba mucho más a la física moderna que la de sus detractores. En efecto, Pascal se negó a aceptar afirmaciones *a priori*, como la inexistencia del vacío, por lo que concierne a la naturaleza de las cosas; podría decirse que, en este terreno, su espíritu estaba libre de cualquier interferencia metafísica, ya que solo las experiencias tenían autoridad en las cuestiones referentes a la física.

PASCAL Y LA HIDROSTÁTICA

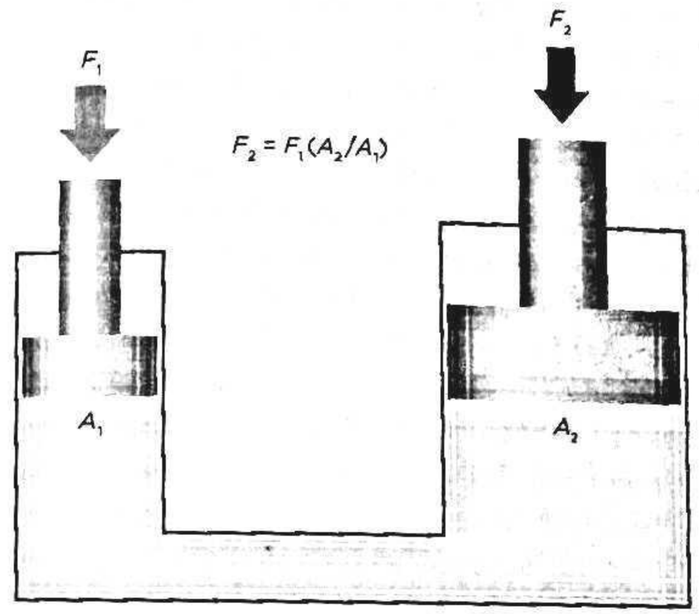
Es bien conocido que el primer gran principio relacionado con el concepto de presión es el del sabio griego Arquímedes (ca. 287-ca. 212 a.C.). Tuvieron que pasar muchos siglos para que se registraran

PASCAL: LA TRASCENDENCIA DE UN NOMBRE

La participación de Pascal en la determinación de la presión atmosférica, y en general la relevancia de sus trabajos experimentales en este ámbito de la física, han hecho que lleven su nombre una de las unidades para la medida de la presión y una de las principales leyes que la rigen. El «pascal» (símbolo Pa) es una unidad derivada del Sistema Internacional utilizada para medir la presión, y se define como un newton por metro cuadrado (es decir, la presión que se ejerce al realizar una fuerza de un newton en un metro cuadrado de superficie). Son múltiplos de esta unidad el hectopascal (1 hPa = 100 Pa), que equivale a un milibar, medida tradicionalmente utilizada en meteorología; el quilopascal (1kPa = 1000 Pa) y el megapascal (1 MPa = 1000000 Pa). Asímismo, la unidad llamada «atmósfera» (atm), o también «atmósfera estándar», equivale a 101325 Pa y se aproxima a la presión atmosférica a nivel del mar en una latitud de 45°.

El «principio de Pascal»

Por otra parte, el denominado «principio de Pascal», o también «ley de Pascal», puede enunciarse de la siguiente manera: si ejercemos una cierta presión sobre un fluido incompresible que se encuentra en un recipiente indeformable, esta se transmite con la misma intensidad en todos los puntos y en todas las direcciones del fluido, es decir, en estas condiciones la presión se distribuye de manera uniforme. Una comprobación del principio de Pascal se obtiene al llenar una esfera con agua y hacer presión sobre ella con un émbolo. En este caso, se observa que si la esfera tiene distintos agujeros, el agua sale por todos ellos con una misma velocidad. Este principio se aplica en múltiples aparatos hidráulicos, como prensas, elevadores, gatos o frenos hidráulicos.



La prensa hidráulica utiliza la ley de Pascal.

avances notables relacionados con este tema. Seguramente, el primero hay que atribuirlo al matemático, físico e ingeniero neerlandés Simon Stevin (1548-1620). Stevinus, nombre latino con el cual era conocido, puso a su obra más notable el título de *La estática o el arte de pesar* (1586), y en ella demostró el equilibrio de fuerzas en un plano inclinado, utilizando un método gráfico muy ingenioso que le permitía demostrar tal equilibrio a partir de la imposibilidad del movimiento perpetuo. Esta construcción, consistente en una cadena de cuerpos iguales y separados por distancias iguales alrededor de un plano inclinado, es conocida con el nombre de «epitafio de Stevinus». Sin embargo el mérito de haber precisado el concepto de presión corresponde a Pascal, que lo hizo en dos tratados ya citados de publicación póstuma: *De l'equilibre des liqueurs* y *De la pesanteur de la masse d'air*. En ellos enunció claramente la idea fundamental de la presión, expresando que la fuerza que ejerce un líquido en equilibrio en todas las partes del recipiente que lo contiene, prescindiendo del peso, es proporcional a la superficie donde se aplica.

Si bien el principio es claro, quizá no lo son tanto los distintos argumentos que aportó para constatar su validez. El primero podría expresarse diciendo que introducir en un líquido un pistón a una determinada profundidad es lo mismo que meter otro pistón cien veces más largo a una profundidad cien veces menor. Para ello invocaba la continuidad y la fluidez del líquido, sin percatarse que estaba postulando la incompresibilidad del líquido y el mantenimiento del volumen en cualquier deformación, a partir del estado de equilibrio. En este tipo de razonamiento, Pascal no se distanciaba demasiado de los trabajos sobre estática realizados por Descartes.

Quizá no convencido por sus propios argumentos anteriores, Pascal trató de realizar otro razonamiento, de tipo geométrico y basado en el concepto de centro de gravedad. Consideró el sistema formado por los dos pistones de una máquina hidráulica en equilibrio, y, teniendo en cuenta la relación de ambos con el fluido conectado a partir de los vasos comunicantes, mostró que el centro de gravedad de los dos pistones —cuyos pesos eran proporcionales a las superficies de cada uno en contacto con el líquido— no podría descender. En realidad, aunque sin mencionarlo, estaba utilizando el principio de Torricelli, según el cual, la velocidad de un líquido en un recipiente abierto por un orificio es la misma que tendría un cuerpo cualquiera, cayendo libremente en el vacío, desde el nivel del líquido hasta el centro de gravedad del orificio.

Si bien las características de la presión y sus leyes básicas quedaban establecidas, los argumentos aún tenían puntos oscuros que el propio Pascal intuyó. No obstante, fue consciente de la relevancia de los trabajos que lo llevaban a realizar afirmaciones sorprendentes y novedosas, como la siguiente: «Un vaso de agua es una máquina mecánica para multiplicar las fuerzas».

Finalmente, cabe señalar que las investigaciones sobre física de Pascal han sido objeto de revisión numerosas veces, en particular a principios del siglo xx. A pesar de ello, aún coexisten hoy interpretaciones diferentes sobre la originalidad y la honradez intelectual de Pascal, ya que mientras algunos historiadores no han encontrado evidencias sobre posibles imposturas, otros ponen en duda dicha honradez. Una vez más se funden el personaje genial y el hombre contradictorio.

CAPÍTULO 4

El triángulo aritmético, o de Pascal

Pascal realizó importantes aportaciones al estudio del triángulo aritmético, sus propiedades numéricas y su relación tanto con los números combinatorios como con los coeficientes del desarrollo del binomio. El pensador francés expresó además las múltiples propiedades de esta figura mediante un procedimiento de demostración matemática que años más tarde sería conocido con el nombre de «método de la inducción completa».

Dentro de la obra matemática de Pascal destacan sus aportaciones al estudio de los números combinatorios y otras propiedades numéricas, cuyos resultados expuso en el tratado sobre el triángulo aritmético. Trabajó alrededor de este tema en el período 1651-1654, año en el que finalizó el tratado, el cual, sin embargo, no fue publicado hasta 1665, tres años después de la muerte del pensador francés.

En 1647, Pascal había regresado a París con su hermana Jacqueline, y en septiembre de este mismo año tuvo un encuentro con Descartes, quien viajó a la capital francesa desde las Provincias Unidas, su lugar de residencia habitual en aquellos años. Fue en este encuentro cuando discutieron sobre los experimentos de física del Puy-de-Dôme, ya conocidos.

Los miembros de la familia Pascal —Étienne, Blaise y Jacqueline— dejaron de nuevo París durante la guerra civil conocida con el nombre de la Fronda, en 1648, pero volvieron a la capital al final del mismo año, cuando las tareas de Étienne en Ruan finalizaron. Fue en ese momento cuando Jacqueline expresó su deseo de hacerse monja. Sin embargo, postergó la decisión hasta 1651, pocos meses después de la muerte de Étienne y, a pesar de la oposición de su hermano, ese mismo año ingresó en el convento de Port Royal, una congregación jansenista. Dado que Gilberte, la hermana mayor, había contraído matrimonio en 1641 con Florin Périer y se había mudado a Clermont-Ferrand, la familia Pascal estaba disgre-

gada y Blaise, cuya salud seguía siendo precaria, se encontró por primera vez en su vida completamente solo, a la edad de 28 años.

Durante el período que va desde 1651 a 1654, Pascal vivió en París, salvo una estancia en Clermont-Ferrand en casa de su hermana. Disfrutaba de la herencia recibida a la muerte de su padre, por lo que pudo acercarse a círculos mundanos, y se vio influido por los consejos de Jacqueline y el preceptor de esta, el prominente sacerdote jansenista Antoine Singlin (1607-1664). Fue en esta época cuando conoció al caballero de Méré, el cual le propuso algunos problemas relativos a los juegos de azar, de relevancia para el nacimiento de la probabilidad, y también cuando volvió a las matemáticas para trabajar sobre el triángulo aritmético, un tema numérico pero con estrecha relación con la combinatoria (y por ello, con la probabilidad). El centro de este reencuentro con las matemáticas lo constituiría la correspondencia que mantuvo con Fermat a propósito de la resolución de diversos juegos de azar, y que luego Pascal plasmaría en su tratado sobre el triángulo aritmético.

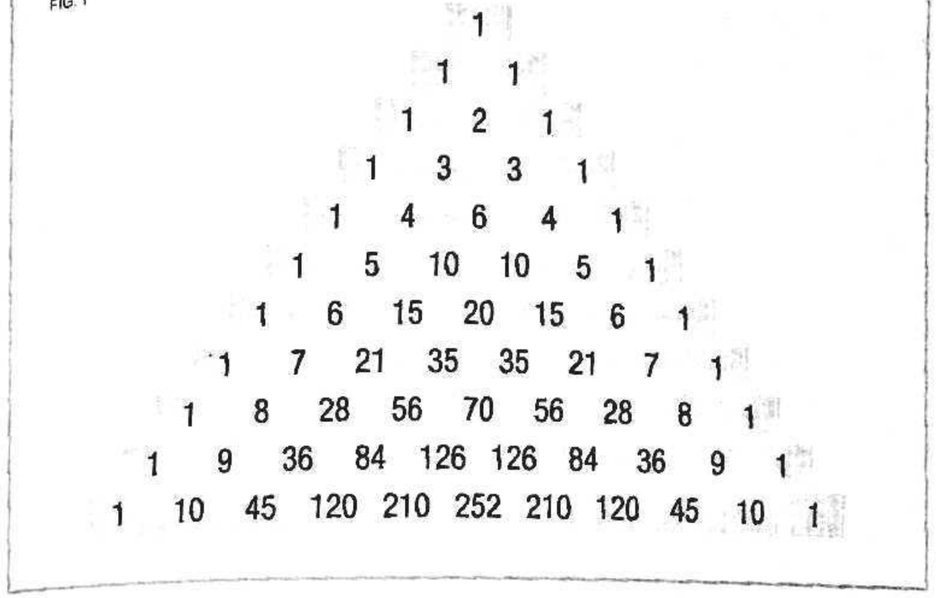
EL TRIÁNGULO ARITMÉTICO ANTES DE PASCAL

El triángulo aritmético es una representación de ciertos números naturales que están dispuestos formando un triángulo, y con una ley de formación que permite ir generando los números que constituyen cada una de las filas del triángulo. Obsérvense los números que forman las primeras filas del triángulo en la figura 1:

Cada fila empieza y acaba con 1, y cada uno de los números interiores es la suma de los dos números que están encima, es decir, el número i de la fila m es igual a la suma del número $i-1$ y del número i de la fila $m-1$, para cualquier i tal que $1 < i < m-1$.

El interés de esta configuración de números naturales es que tiene un conjunto de aplicaciones muy relevante en relación con diversos temas, entre ellos: las sucesiones de números naturales (en particular los llamados números figurados: números triangulares, tetragonales, etc.), los coeficientes del desarrollo del binomio $(a + b)^n$, los números combinatorios y la probabilidad.

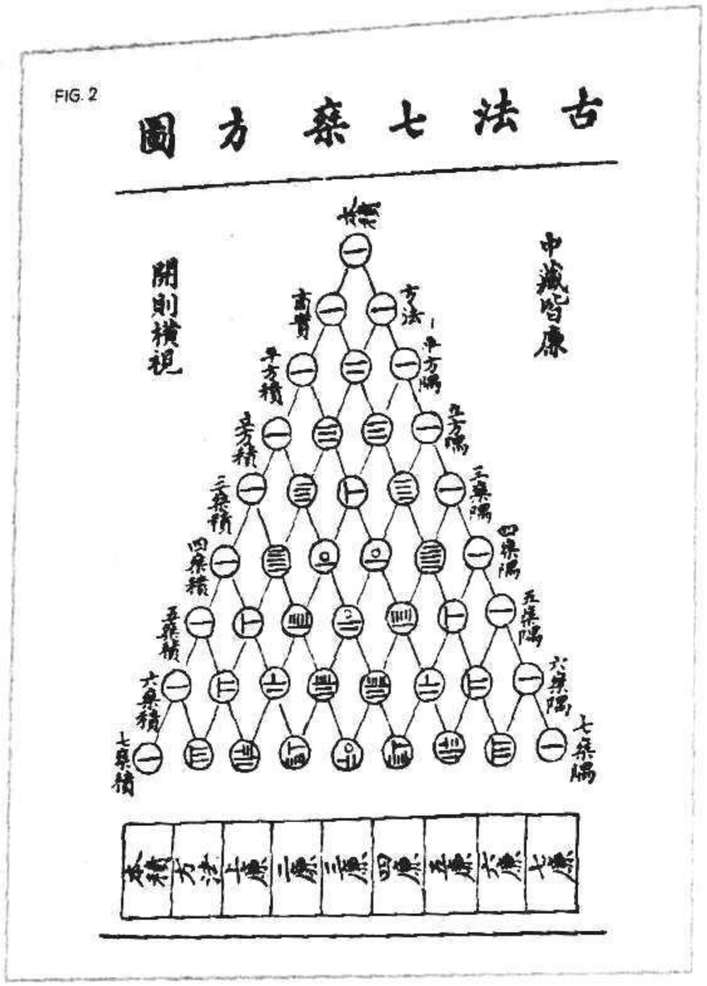
FIG. 1



El triángulo aritmético.

El origen del triángulo aritmético parece ser muy antiguo, y seguramente surgió como una curiosidad matemática desligada de sus múltiples aplicaciones, pero pronto fue empleado como instrumento para determinar ciertos números, realizar cálculos y determinar coeficientes. Así, las primeras referencias conocidas del triángulo se remontan al siglo XI, con el trabajo del matemático chino Chia Hsien, quien lo utilizó para determinar raíces cuadradas y cúbicas. En la misma época, primero el matemático persa al Karaji (siglo x) y luego, de manera especial, el también persa Omar Khayyam (1048-1113) lo usaron de manera similar y establecieron muchas de sus propiedades, entre ellas la relación entre los números de cada fila y los coeficientes del binomio. En la matemática china, las referencias al triángulo son numerosas y de Yang Hui (siglo XIII) procede la primera representación conocida (figura 2).

Otros matemáticos chinos lo utilizaron para resolver ciertas ecuaciones de grado elevado (cinco y superiores) y su relación con los coeficientes del binomio y la determinación de raíces era ya conocida. En concreto, Zhu Shijie (ca. 1270-ca. 1330), en su trabajo de 1303, donde también aparece una representación del triángulo, cuenta que este era ya conocido desde mucho tiempo atrás.



Una representación del triángulo aritmético del matemático chino Yang Hui (siglo XIII).

En Europa, la primera referencia aparece en *Rechnung*, una aritmética comercial del siglo XVI original del alemán Petrus Apianus (Peter Bienewitz, 1495-1552). En la misma centuria, el triángulo también fue estudiado por otros matemáticos, entre ellos el también alemán Michael Stifel (1487-1567), el italiano Niccolò Fontana (conocido como Tartaglia, 1500-1577) y el francés François Viète (1540-1603).

Cabe señalar que el triángulo se conoció con nombres distintos según los matemáticos que en cada lugar y tiempo hicieron contribuciones a su estudio: por ejemplo, se llamaba triángulo de Yan Hui en China, de Khayyam en Irán, de Tartaglia en Italia y finalmente de Pascal, que es el nombre más generalizado en Occidente.

LA APORTACIÓN DE PASCAL AL TRIÁNGULO ARITMÉTICO

Pascal sintetizó sus trabajos sobre el triángulo aritmético en el *Traité du triangle arithmétique*, que finalizó en 1654. Sin embargo, este documento no fue publicado hasta 1665, de manera póstuma. A causa de la relevancia de este trabajo, el matemático francés Abraham de Moivre (1667-1754) denominó el triángulo arit-

FOTO SUPERIOR IZQUIERDA: **El matemático francés François Viète fue otro de los precursores del estudio del triángulo aritmético.**

FOTO SUPERIOR IZQUIERDA: **Retrato de Petrus Apianus —quien publicó la primera referencia al triángulo aritmético en Europa— según un grabado realizado por P. Galle.**

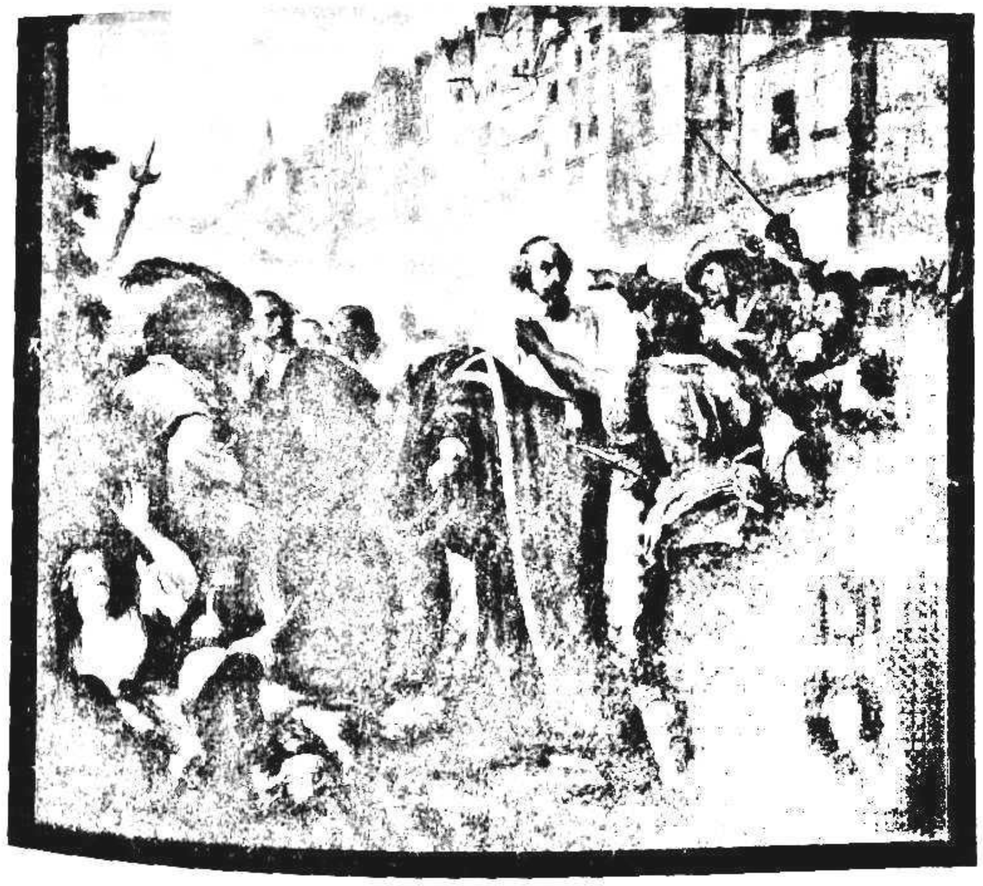


FOTO INFERIOR: **Óleo de François-Xavier Dupre (1803-1871) que muestra al pueblo aclamando en las calles de París al cardenal Mazarino, valido de la regente Ana de Austria, tras haber logrado el fin de la guerra de la Fronda. La familia Pascal abandonó la capital francesa durante dicha guerra.**

mético como «*triangulum arithmeticum pascalianum*» (1730), y desde entonces se conoce en el mundo occidental con el nombre de «triángulo de Pascal».

El tratado, bastante breve como la mayoría de trabajos matemáticos de Pascal, tiene treinta y seis páginas y está dividido en dos partes. La primera de ellas lleva como título *Traité du triangle arithmétique* (*Tratado del triángulo aritmético*), que es el nombre dado actualmente a toda la obra, mientras que la segunda parte se titula *Divers usages du triangle arithmetique* (*Diversos usos del triángulo aritmético*), con el subtítulo *Dont le generateur est l'unite* (*Cuyo generador es la unidad*). Está dividida en cuatro secciones, correspondientes a otras tantas aplicaciones del triángulo: 1) la teoría de los números figurados; 2) la teoría de las combinaciones; 3) el reparto de apuestas en juegos de azar, y 4) la obtención de los coeficientes de expresiones binomiales.

LOS NÚMEROS DEL TRIÁNGULO

La primera parte del tratado se ocupa de los números que forman el triángulo, sus relaciones y propiedades, sin atender a otros significados ni posibles aplicaciones.

Justo al inicio aparece un dibujo del triángulo que es muy revelador, puesto que tiene forma de matriz, es decir, presenta una orientación distinta a la mostrada en las antiguas representaciones chinas o árabes. Pascal estaba pensando en una matriz donde la primera fila y la primera columna estuvieran formadas por números iguales, y para su dibujo consideró el caso especial en que todos los números de la primera fila y todos los de la primera columna son 1. Sin embargo, tanto en el enunciado como en las demostraciones de sus propiedades, no mencionó ni utilizó que estos números tienen el valor 1, sino únicamente que son iguales.

Con esta disposición en forma de matriz, cada uno del resto de números que aparecen en el triángulo es igual a la suma de su anterior en la fila y de su anterior en la columna.

Hay que destacar que Pascal solía servirse, tanto para las definiciones como para los razonamientos de sus demostraciones, de un lenguaje predominantemente verbal, con un simbolismo reducido; y que incluso cuando este está presente, resulta por lo general confuso, y a veces poco apropiado.

Para determinar el número que ocupa la fila i y la columna j, en la primera definición sobre los números que corresponden a cada celda del triángulo se expresa lo que la notación moderna definiría como:

$$f_{i,j} = f_{i-1,j} + f_{i,j-1} \quad i, j = 2, 3, 4, 5\ldots$$

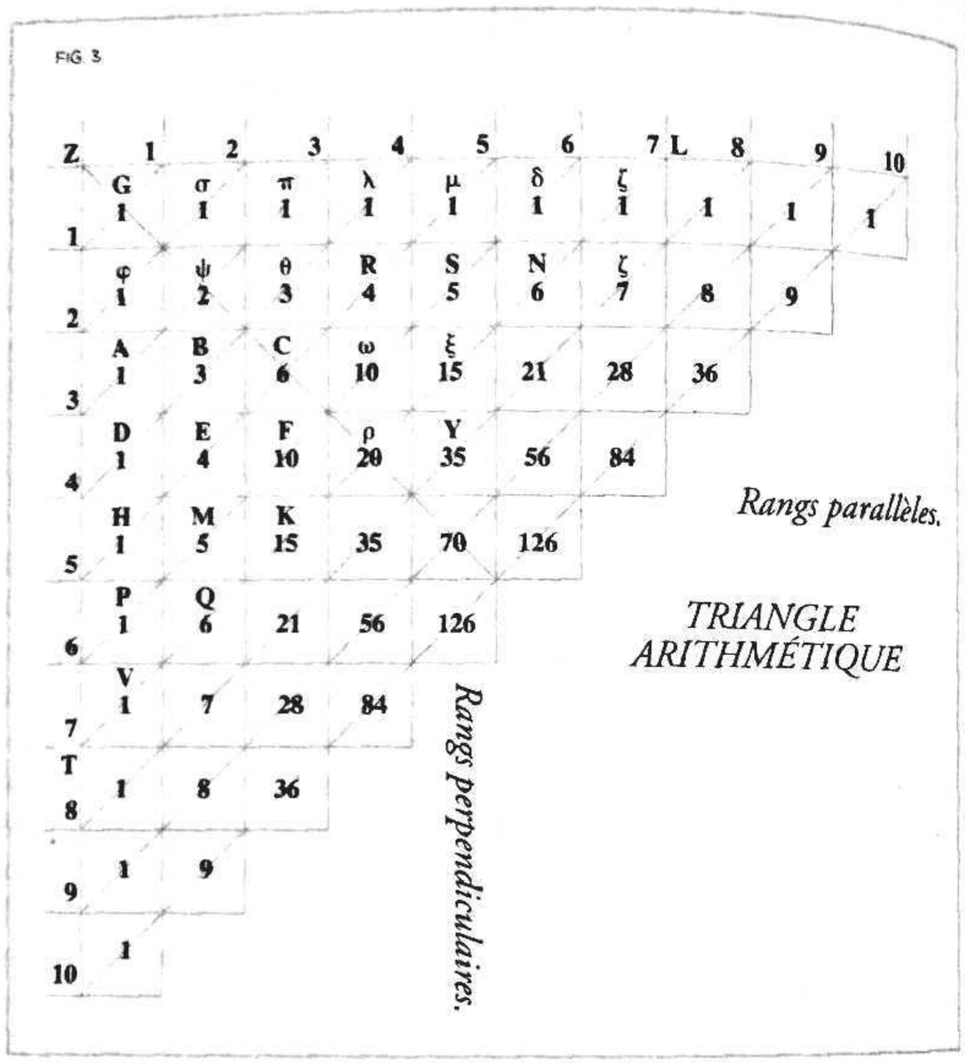
$$f_{i,1} = f_{1,j} \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5\ldots$$

Sin duda, esta disposición resulta más adecuada, y es la que se utilizaría en la actualidad para construir rápidamente el triángulo con un ordenador, por ejemplo, usando el programa Excel. La única y sencilla fórmula recurrente consiste en que cada número es la suma del que está encima y el que está a su izquierda, al margen de la primera fila y la primera columna que son números iguales (1 en la versión habitual del triángulo).

Tras estas definiciones iniciales, el resto de la primera parte está dedicada a la formulación de diecinueve propiedades (corolarios o consecuencias en terminología del propio Pascal) y la correspondiente demostración de la mayoría de ellas. No todas las propiedades son nuevas, pero casi todas sí son relevantes y muchas de ellas se demuestran por vez primera, utilizando en algunos casos el método de la inducción completa, como veremos más adelante. Estas propiedades, en su conjunto, constituyen una excelente caracterización del triángulo aritmético, entendido hasta aquí tan solo como una disposición de números dada por una ley recurrente.

La manera en que Pascal escribió este texto hace que, por un lado, sea legible por alguien no acostumbrado al simbolismo matemático, pero, al mismo tiempo, la falta de una notación ágil hace que el texto sea bastante difícil de interpretar, a pesar de utilizar pocos símbolos, hasta que el lector no se familiarice con sus definiciones.

Dibujo de Pascal que representa el triángulo aritmético que actualmente lleva su nombre.



En relación a las posiciones interiores del triángulo aritmético, Pascal llamaba «celdas del mismo rango paralelo» a todas las posiciones de una misma fila, y «celdas del mismo rango perpendicular» a todas las posiciones de una misma columna. De manera análoga llamaba «celdas de una misma base» a todas las posiciones de una misma diagonal, entendida como el conjunto de posiciones (i, j) tales que $i + j = k$.

Las definiciones anteriores sirven para mostrar un ejemplo de formulación del corolario 2, que Pascal llamó «consecuencia segunda»: en todo triángulo aritmético, cada celda es igual a la suma de todas las celdas del rango paralelo precedente, comprendidas entre el inicio y el rango perpendicular, incluido este.

En notación moderna, la propiedad anterior podría expresarse como:

$$f_{i,j} = f_{i-1,1} + f_{i-1,2} + \ldots + f_{i-1,j}$$

o también, de manera más compacta, como:

$$f_{i,j} = \sum_{k=1}^{j} f_{i-1,k}.$$

Si se toma la figura del triángulo trazada por el propio Pascal, la propiedad nos dice que un número cualquiera del triángulo es igual a la suma de los números de la fila anterior, desde el primero hasta el que se encuentra encima de aquel.

Pascal razonaba la validez de la propiedad señalando que resulta evidente de la propia definición de cada celda. Si se toma una celda cualquiera y esta resulta igual a la suma de la que está encima más la de su izquierda, pero esta, a su vez, es igual a la de encima más la de la izquierda, se obtiene la suma de todas las celdas de la fila precedente (menos la primera), más la primera celda de su fila. Pero esta, por ser la inicial, es igual a la primera celda de su fila precedente, de modo que queda demostrada la segunda propiedad.

EL MÉTODO DE DEMOSTRACIÓN POR INDUCCIÓN

Uno de los aspectos relevantes del tratado del triángulo aritmético se encuentra no en los resultados, sino en el método utilizado por Pascal para la demostración de los mismos. En efecto, al argumentar la validez de ciertas propiedades utilizó de manera evidente el método de demostración por inducción, también llamado de inducción completa.

Este método puede expresarse de manera sintética de esta manera: si una propiedad vale para n=1, y supuesta su validez para un n cualquiera se demuestra que también vale para n+1, entonces la propiedad vale para todo n.

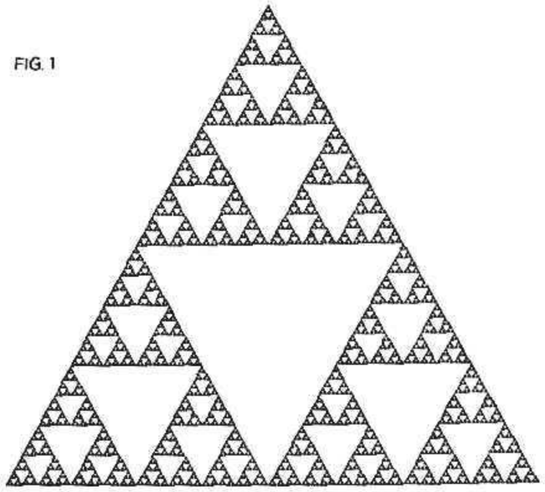
LA APARICIÓN DE LAS FRACTALES

A caballo entre los siglos XIX y XX, y de manera independiente, diversos matemáticos determinaron curvas y superficies con propiedades sorprendentes, entre ellas la curva de Koch (1904), llamada «el copo de nieve»; la curva de Peano, que recubre todo el plano, o el triángulo de Sierpinski. Todas esta curvas, llamadas patológicas, serían uno de los gérmenes para el establecimiento de la teoría de los fractales del matemático polaco Benoit Mandelbrot (1924-2010). Una de estas propiedades es la autosimilitud, que puede caracterizarse como una propiedad que dice que si observamos una estructura con distintas ampliaciones (aplicando un *zoom*) su apariencia siempre es la misma.

La huella de Sierpinski

El polaco Waclaw Sierpinski (1882-1969) fue un matemático que hizo importantes aportaciones a la teoría de conjuntos, la teoría de números y la topología. En 1919 ideó un fractal, que hoy se conoce como triángulo de Sierpinski, que se puede construir, como muestra la imagen, a partir de un triángulo inicial, trazando nuevos triángulos obtenidos al unir los puntos medios de los lados de los triángulos anteriores. Obsérvese que en cada paso se subdividen todos los triángulos exteriores y se dejan sin hacerlo los interiores, lo cual llevará a dejar un triángulo cuya superficie es un 1/4 del inicial, tres triángulos cuya superficie es un 1/16 del inicial, nueve triángulos cuya superficie es un 1/64, y así sucesivamente.

FIG. 1



Si bien el triángulo de Sierpinski tiene una construcción puramente geométrica, es posible relacionarlo con el triángulo aritmético, ya que si se colorean los números impares y se dejan en blanco los pares, se obtiene una representación del mencionado fractal. Algo similar ocurre al colorear todos los números del triángulo y dejar en blanco los múltiplos de un cierto número.

FIG. 2

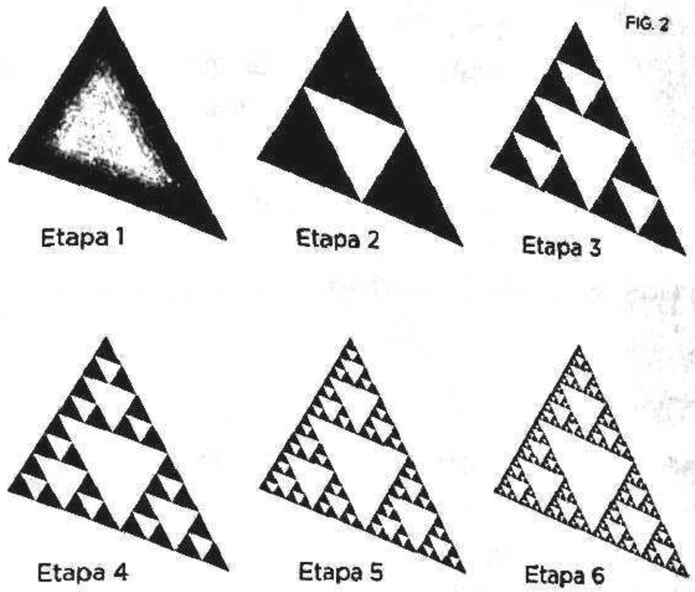


FIG. 3

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1
	1		6		15		20		15		6		1
		1		7		21		35		35		21		7		1
	1		8		28		56		70		56		28		8		1

Hay varios antecedentes sobre el uso de una demostración por inducción. Ciertos razonamientos de Arquímedes (siglo III a.C.) ya contenían el germen de esta forma de razonamiento; también se sirvió de ella el matemático siciliano Francesco Maurolico (1494-1575), en su obra *Arithmeticorum libri duo*, y ya en el siglo XVII el francés Bachet de Méziriac (1581-1638) realizó demostraciones con métodos similares. Sin embargo, se considera a Pascal como el primero que usó este método de una manera explícita, expresando con sus propias palabras los pasos de la demostración. Pocos años después, el matemático suizo Jacques Bernouilli (1654-1705) haría

un uso riguroso de este método de demostración en su obra *Ars conjectandi*, y con ella probó diversos resultados sobre combinatoria y probabilidad.

Pascal aplicaba —y lo que es más importante, explicó cómo lo hacía— el método de demostración por inducción en la propiedad decimosegunda de la primera parte del tratado, que es una de las propiedades descubiertas por él.

«Hay tres objetivos principales en el estudio sobre la verdad: descubrirla cuando se busca; demostrarla cuando se posee; discernirla de lo falso cuando se examina.»

— Blaise Pascal.

El enunciado de la propiedad dice así: en todo triángulo aritmético, si dos celdas de una misma base son contiguas, entonces el número de la superior es, al número de la inferior, como el número de celdas desde la superior al extremo más alto de esta base es al número de celdas que van desde la inferior hasta el extremo más bajo. En ambos casos se incluyen los extremos.

Por ejemplo, tomemos la base del triángulo aritmético que está formada por los números:

1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.

Entonces, un caso concreto de esta propiedad dice que:

21 (tercer término)/7 (segundo término) = 6 (número de valores de 21 hasta el final)/2 (número de valores desde el inicio hasta 7).

Análogamente, esta propiedad podría aplicarse a cualquier otro par de números contiguos de esta o de cualquier otra base. Por ejemplo:

21 (sexto término)/35 (quinto término) = 3 (número de valores de 21 hasta el final)/5 (número de valores desde el inicio hasta 35).

En lenguaje moderno se podría expresar la propiedad de manera general con la siguiente expresión:

$$f_{i,j}/f_{i-1,j+1} = j/(i-1).$$

Después de exponer el enunciado de la propiedad, Pascal escribió:

> Aunque esta proposición tiene una infinitud de casos, voy a dar una demostración muy corta, suponiendo únicamente dos lemas: El primer lema dice que es evidente que la proposición se cumple para la base 2 (formada por dos unos), ya que es bien visible que los dos números están en la misma proporción que 1 a 1. El segundo lema dice que si esta proporción se cumple para una base cualquiera, entonces se cumplirá para la base siguiente.

Pascal sigue diciendo que de los dos lemas se deduce que la proposición es cierta para todas las bases, puesto que lo es para la segunda base (por el lema 1) y lo es para la base 3, para la base 4, y así hasta el infinito, por la aplicación reiterada del lema 2. Por lo tanto, acaba el comentario diciendo que bastará con demostrar el lema 2, cosa que hace a continuación.

En este pequeño párrafo se halla la primera exposición del método de demostración por inducción de una manera completamente explícita. Un procedimiento que, a pesar de llevar el nombre de demostración por inducción, nada tiene que ver con el significado que esta palabra recibe en las ciencias experimentales, donde la inducción se entiende como un razonamiento que permite inferir una ley general a partir de casos particulares. En matemáticas, un proceso similar, que también se realiza para realizar conjeturas, nunca puede entenderse como una demostración, ya que esta debe basarse en argumentos lógicos que permitan obtener unas premisas de otras. Esta es, seguramente, la principal diferencia entre las matemáticas, ciencia hipotético-deductiva basada en la demostración, y las ciencias experimentales, la validez de cuyos resultados se fundamenta en la experimentación.

LA SEGUNDA PARTE DEL TRATADO DEL TRIÁNGULO ARITMÉTICO

Como se expuso al presentar el tratado del triángulo aritmético, este está formado por dos partes, la segunda de las cuales se ocupa de las distintas aplicaciones del triángulo y, de acuerdo con ellas, se divide en cuatro apartados.

En todos los apartados, la idea de Pascal es mostrar la relación directa que existe entre los números del triángulo y los números figurados, los números combinatorios y los coeficientes del desarrollo del binomio, para poder concluir que todas las propiedades del triángulo expuestas en la primera parte del tratado son aplicables a cada uno de los casos.

«La palabra combinación puede tener muchos significados, por lo que me veo obligado a precisar cómo la entiendo: cuando de varias cosas se da a escoger un cierto número de ellas, todas las maneras posibles de escogerlas se llaman "las diferentes combinaciones".»

— BLAISE PASCAL, AL INICIO DEL USO DEL TRIÁNGULO ARITMÉTICO PARA LAS COMBINACIONES.

El primero de los apartados se refiere a las aplicaciones del triángulo a los números figurados. Empieza con la definición de las distintas sucesiones, que Pascal llamó «órdenes numéricos» (*ordres numériques*). Así, la sucesión formada por unidades son los números de primer orden; los números naturales que son suma de unidades son los números de segundo orden; la suma de los naturales son los de tercer orden (llamados «triangulares»): la suma de estos da los de cuarto orden («piramidales»), y así sucesivamente. Al llamar triangulares a los números de tercer orden y piramidales a los de cuarto orden, Pascal estaba relacionando los órdenes con algunos de los llamados números figurados.

A continuación, el matemático francés incluyó la tabla adjunta, para mostrar que los sucesivos órdenes se corresponden tanto con las filas como con las columnas del triángulo; razonó por qué esto es así y explicó que, de manera consecuente, todas las propiedades del triángulo pueden aplicarse al conocimiento de los órdenes numéricos.

El segundo apartado se refiere a la interpretación de los números del triángulo como números combinatorios, es decir, como el número de combinaciones de n elementos tomados de r en r. De modo similar a lo que sucedía con los números figurados, Pascal constató la relación entre los números combinatorios y los números que forman el triángulo. Esta relación era ya conocida en la India, en el siglo IX, y fue citada por Cardano en 1550. Aunque Pascal no lo representase, llamando nCr a las combinaciones de n elementos tomados de r en r, se puede pensar el triángulo de esta forma:

0C0 = 1	1C1 = 1	2C2 = 1	3C3 = 1	4C4 = 1
1C0 = 1	2C1 = 2	3C2 = 3	4C3 = 4	
2C0 = 1	3C1 = 3	4C2 = 6		
3C0 = 1	4C1 = 4			
4C0 = 1				

FIG. 4

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0}\quad\binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0}\quad\binom{2}{1}\quad\binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0}\quad\binom{3}{1}\quad\binom{3}{2}\quad\binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0}\quad\binom{4}{1}\quad\binom{4}{2}\quad\binom{4}{3}\quad\binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0}\quad\binom{5}{1}\quad\binom{5}{2}\quad\binom{5}{3}\quad\binom{5}{4}\quad\binom{5}{5}$$

El triángulo aritmético utilizando la expresión moderna de los números combinatorios.

Pascal dio una nueva demostración de la propiedad de los números combinatorios $(n+1)C(r+1) = nCr + nC(r+1)$, descomponiendo el primer término de la igualdad en dos sumandos, derivados de considerar por un lado las combinaciones que contienen un elemento determinado, y por otro aquellas que no lo contienen.

El tercer apartado se refiere a las aplicaciones del triángulo a los juegos de azar. Será explicado en el siguiente capítulo.

Finalmente, en el cuarto apartado, Pascal abordó la relación entre los números del triángulo y los coeficientes del desarrollo del binomio, constatando que al desarrollar la expresión algebraica $(x+y)^n$, se obtienen los sucesivos coeficientes para cada uno de los términos: x^n, $x^{n-1}y$, $x^{n-2}y^2$..., hasta x^1y^{n-1}, y^n, de modo que estos números se corresponden con los de la diagonal $n+1$ del triángulo. La prueba de este resultado se basa en el principio de inducción. Para $n=1$ es evidente. Lo asumimos cierto para $n-1$ y, utilizando la igualdad,

$$(x+y)^n=(x+y)(x+y)^{n-1}$$

en la que, gracias a la hipótesis de inducción, el binomio $(x+y)^{n-1}$ se iguala con la suma

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k}$$

y luego se opera; el resultado se deduce directamente de la propiedad recurrente que verifican los números combinatorios:

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}.$$

En este último apartado, Pascal también evocó el desarrollo de $(1+x)^n$, que lleva a introducir la fórmula del binomio de Newton.

CAPÍTULO 5

Pascal y el origen del cálculo de probabilidades

Pascal contribuyó decisivamente al establecimiento del concepto de probabilidad y al cálculo de probabilidades. De hecho, sus resultados sobre los juegos de azar —que comunicó por carta a Pierre de Fermat en 1654— están considerados como el origen del estudio de la probabilidad, pese a que no formuló ningún marco teórico sobre dicha rama de las matemáticas y ni siquiera hizo mención alguna al término para referirse a ella.

Las primeras referencias sobre la formulación matemática del concepto de azar proceden, principalmente, de la Italia del siglo XVI. En esas fuentes no había aún una formulación teórica explícita de la probabilidad, sino un conjunto de técnicas que se elaboraban e implementaban para resolver problemas, así como observaciones sobre las mismas. Para disponer de una teoría sobre la probabilidad fue necesario esperar a principios del XVIII, con la publicación de *Ars conjectandi* (1713) del matemático suizo Jakob Bernouilli (1654-1705), y de manera mucho más definitiva a la aparición de *la Theorie analytique des probabilités* (1812), obra del matemático y científico francés Pierre Simon de Laplace (1749-1827).

LOS PRECURSORES DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

La idea de azar y la importancia de la predicción del futuro tienen su origen en las civilizaciones más antiguas, por ello no es de extrañar que en la antigua Babilonia fueran de la mano la astronomía y la astrología. Por otra parte, los juegos de mesa, y en particular los juegos de azar, también son actividades humanas que se remontan a las primeras civilizaciones: tanto en Egipto, con el juego del

Senet, como en Babilonia, con el real juego de Ur, se han encontrado evidencias que permiten asegurar que los juegos de azar ya existían hace más de 4000 años. Y no se trataba únicamente de un divertimento, ya que el resultado de una partida podía actuar de manera premonitoria, tal como aparece en el apartado 17 del antiguo *Libro de los muertos*, texto religioso del Egipto faraónico donde se afirma que el difunto jugará una partida de Senet con el destino en presencia del dios Osiris, de cuyo resultado dependerá su vida en el más allá.

También se sabe que la invención de los dados cúbicos para simular el azar no fue algo inmediato, ya que se han encontrado tanto dados tetraédricos, en Babilonia, como otros artilugios en Egipto (por ejemplo, un conjunto de palitos con dos caras pintadas en distintos colores para simular el azar, en el juego del Senet).

Sin embargo, la asignación de una medida para distinguir aquellos sucesos que pueden presentarse más a menudo que otros, es decir, la construcción de un modelo matemático que permita caracterizar cuantitativamente el azar, y en particular la asignación de probabilidades, entendidas como números entre 0 y 1 que miden la posibilidad de que un suceso se presente (se entiende que cero corresponde al suceso imposible y uno al seguro), resulta mucho más complejo y no apareció hasta el siglo XVII.

En todo caso, los primeros intentos para realizar un análisis matemático del azar estaban directamente relacionados con el estudio de los juegos de azar. En concreto, las primeras referencias matemáticas se encontraban ligadas a la determinación del espacio muestral, es decir, al conjunto de posibilidades al lanzar uno o más dados y, sobre todo, a la determinación de la probabilidad de cada una de ellas para poder —o no— considerarlas equiprobables. Mientras resulta evidente que al lanzar un dado cúbico convencional hay seis posibilidades de resultado y que todas son equiprobables, ya no lo es tanto que, al lanzar dos, las posibilidades sean 36, y al lanzar tres, 216. El filósofo francés Richard de Fournival (1201-1260) determinó correctamente estos resultados, al tener en cuenta las permutaciones de una misma combinación.

Sin embargo, hubo que esperar hasta principios del siglo XVI para encontrar referencias matemáticas algo más relevantes, a

cargo de distintos algebristas italianos como Luca Pacioli (1445-1517), Nicolo Fontana «Tartaglia» (1500-1557), Gerolamo Cardano (1501-1576) e incluso Galileo Galilei (1564-1642), que a principios del siglo XVII realizó interesantes reflexiones en su obra *Sopra le scoperte dei dadi* (1612), a propósito de los sucesos equiprobables en distintos lanzamientos de dados y otras consideraciones sobre el establecimiento del espacio muestral en diferentes juegos de dados.

Muchas de estas referencias consisten en resoluciones de situaciones problemáticas planteadas a partir de un juego de azar. El más conocido de tales problemas, sin duda relevante para el nacimiento de la probabilidad, es el llamado «problema de la partida interrumpida», que Tartaglia no consiguió resolver de manera correcta, pues se centró en lo ocurrido hasta el momento de la interrupción de la partida, en lugar de poner el foco en lo que podría suceder si continuara. Este famoso problema, que trataremos con detalle más adelante, consiste en preguntarse cómo deben repartirse las apuestas de un juego entre dos jugadores si este se interrumpe antes de su finalización, de acuerdo con el resultado del juego en el momento de la interrupción.

El primer tratado propiamente relacionado con el azar llevaba por título *Liber de ludo alae* y fue escrito por Cardano. El problema de este tratado es que su autor lo escribió hacia 1564, pero no fue publicado hasta un siglo más tarde, en 1663, por lo que sus resultados no fueron conocidos por Pascal y Fermat cuando estos mantuvieron la correspondencia sobre el tema. En esta obra, Cardano utilizó el concepto de probabilidad para resolver problemas, aunque no lo definió de manera explícita. La falta de una notación adecuada hizo que siempre se refiriera a la resolución de problemas con valores concretos. No obstante, de la forma de resolver los problemas se puede inducir que ya tenía claro que la probabilidad de un suceso toma valores entre 0 y 1, si se calcula por cociente entre casos favorables y casos posibles (ley que tampoco explicita). Incluso llegó a esbozar lo que hoy se denomina «ley de los grandes números», al decir que, si en un juego, un suceso tiene probabilidad p, después de n lanzamientos habrá que apostar a que dicho suceso aparecerá np veces. La ley de los grandes números relaciona la probabilidad teórica con la frecuencia relativa, de modo

que si decimos que la probabilidad de obtener un 5 al lanzar un dado cúbico es 1/6, y lanzamos un dado un número muy elevado de veces, el cociente entre el número de veces que sale 5 y el número total de lanzamientos se aproxima a 1/6, y esta aproximación es mejor al aumentar el número de lanzamientos.

En resumen, los trabajos de la época, anteriores a la correspondencia entre Pascal y Fermat, trataban básicamente dos problemáticas: las situaciones de recuento de posibilidades (problemas de combinatoria) y las situaciones de juegos de azar, en particular los relacionados con apuestas, como el mencionado problema de la partida interrumpida.

LA «GEOMETRÍA DEL AZAR»

Si bien fueron los matemáticos italianos los que se ocuparon por primera vez del estudio matemático del azar, hubo que trasladarse a la Francia del siglo XVII para hallar las bases que permitirían formular una teoría organizada.

A diferencia de lo que había sucedido cuando Pascal se dedicó al estudio de las cónicas, para el cual pudo partir de los resultados de otros, los trabajos sobre la probabilidad surgieron directamente al tratar de resolver dos problemas inmediatos. En un viaje que hizo a Poitou en 1652, coincidió con A. Gombauld, señor de Baussay, un noble conocido como Caballero de Méré, personaje ilustrado y gran amante de los juegos de azar, tanto de dados como de cartas. Este aristócrata planteó diversos problemas que interesaron a Pascal, quien trató de hallar las soluciones, dándose cuenta que con sus razonamientos para tratar de resolver estos problemas estaba haciendo algo nuevo. Tras casi dos años pensando en dichos problemas, Pascal consideró que era necesario compartir sus conclusiones con algún otro matemático. El elegido fue Pierre de Fermat.

Entre el verano y el otoño de 1654, Pascal y Fermat mantuvieron una correspondencia en la que discutieron y, sobre todo, resolvieron algunos problemas sobre juegos de azar. Estas cartas se

conocieron en los círculos científicos de París, atrajeron la atención de otros matemáticos y supusieron el arranque de un conjunto de trabajos relevantes para la consolidación, entre finales del siglo XVII y principios de la posterior centuria, de la teoría de probabilidades. Pascal llamó a estos nuevos estudios «*la geometrie du hasard*» (la geometría del azar), de acuerdo con el comentario que él mismo escribió: «juntando el rigor de las demostraciones de la ciencia con la incertidumbre del azar, y conciliando estas cosas en apariencia contrarias, puede, obteniendo su nombre de los dos, arrogarse el buen derecho de este título: *La geometría del azar*». La expresión no hizo fortuna y fue pronto olvidada, tal vez porque cuando Pascal utilizaba el término geometría se estaba refiriendo a las matemáticas, más que a cuanto habitualmente se conoce como geometría.

> «Juntando el rigor de las demostraciones de la ciencia con la incertidumbre del azar, y conciliando estas cosas en apariencia contrarias, puede, obteniendo su nombre de los dos, arrogarse el buen derecho de este título: *La geometría del azar.*»
>
> — PASCAL, A PROPÓSITO DE SU ESTUDIO SOBRE LA PROBABILIDAD.

UNA RELACIÓN EPISTOLAR

Aunque es posible que Pascal y Fermat ya se conocieran, sabemos que el segundo, que vivía en Toulouse, establecía sus contactos con el mundo científico de París a través de Pierre de Carcavi (1603-1684), matemático francés que fue el secretario de la biblioteca real de la corte de Luis XIV, y que anteriormente había ocupado un cargo en Toulouse, donde conoció a Fermat. En cualquier caso, en verano de 1654 se inició la correspondencia entre ambos, que se extendería hasta finales de octubre.

Las cartas de este período enviadas por Pascal están fechadas a 29 de julio, 24 de agosto y 27 de octubre, y las de Fermat a 29 de agosto y 25 de septiembre, siempre de 1654. Se conoce también una carta no fechada y se tienen referencias de otra perdida, ambas

PIERRE DE FERMAT, JURISTA Y MATEMÁTICO

El francés Pierre de Fermat (1601-1665) a menudo es llamado «príncipe de los matemáticos aficionados»: las matemáticas eran su gran pasión, a la que se consagraba siempre que disponía de tiempo libre, pues ejercía como jurista, y no publicó en vida ninguno de sus trabajos. Afortunadamente, muchos de ellos se conocen gracias a las cartas que intercambió con diversos colegas de su época, como Descartes, Mersenne o Pascal. Nacido en Beaumont-de-Lomagne, cerca de Montauban, Fermat estudió derecho en Toulouse, ciudad donde se instaló como abogado después de sendas estancias en Burdeos y Orleans. Consiguió una posición distinguida en el Parlamento de Toulouse, lo que le permitió vivir holgadamente y disponer de tiempo para dedicarse a las matemáticas, y hacia el final de su vida se trasladó a Castres, ciudad en la que murió. Su principal interés y también sus mayores aportaciones a las matemáticas correspondieron a la teoría de números, aunque también hizo contribuciones relevantes en geometría, así como en la determinación de los extremos de una función, con un método algebraico anterior a la existencia del cálculo diferencial. Siempre consideró que sus trabajos matemáticos eran un entretenimiento para olvidar sus disputas como jurista. Tuvo intuiciones geniales pero el hecho de no querer publicar sus trabajos, junto con su carácter a menudo polemizador (así lo muestra la correspondencia con sus contemporáneos, en particular con Descartes), hizo que las opiniones de estos fueran muy dispares. Así, mientras Pascal lo consideraba el mayor matemático de Europa y Mersenne como el sabio consejero de Toulouse, Descartes lo calificó de fanfarrón y Wallis de maldito francés. Una de las conjeturas que Fermat anotó en el margen de una versión francesa de la obra de Diofanto, de formulación muy simple, la ecuación $x^n + y^n = z^n$, no tiene soluciones enteras para $n>2$, y fue el problema matemático que mayor tiempo tardó en ser resuelto, hasta que Andrew Wiles logró demostrarla en 1995, más de trescientos años después de la formulación de la conjetura. Tras la muerte de Fermat, su hijo mayor publicó un libro titulado *Varia opera mathematica* (Toulouse, 1679) con algunos de los trabajos de su padre.

de Fermat a Pascal, aunque es posible que intercambiaran alguna otra misiva hoy desconocida.

Al margen de los problemas sobre juegos de azar, en las cartas se observa cómo ambos matemáticos fueron mejorando progresivamente sus soluciones y argumentos, al mismo tiempo que introducían diversos comentarios interesantes, que muestran el tipo de relación establecida entre ambos. Así se aprecia en la referencia que hizo Pascal de Gombauld el 29 de julio de 1654, después de explicar las discrepancias entre sus soluciones teórica y experimental, en la que escribió: «el caballero de Méré tiene mucho talento pero no es un geómetra, y esto, como sabéis, es un gran defecto». También se constata en su satisfacción al ver que los resultados de Fermat y los suyos coincidían, a pesar de que los métodos de resolución eran distintos: «Ya ve que la verdad es la misma en Toulouse que en París».

> «Admiro su método para los repartos, más aun porque lo comprendo bien, es totalmente suyo, no tiene nada en común con el mío y llega al mismo resultado. Así, nuestra comprensión ha quedado establecida.»
>
> — Blaise Pascal, carta a Pierre de Fermat, 29 de julio de 1654.

La lectura de estas cartas muestra que Pascal tenía gran consideración por el talento de Fermat, que consideraba superior al suyo. Por su parte, Fermat, que también valoraba la capacidad de Pascal, intentó llevarle a su terreno, haciendo que este se involucrara en problemas de números, algo que no logró, como queda patente en el comentario que hace su corresponsal el 27 de octubre de 1654: «deberá buscar a alguien que le siga en sus cuestiones numéricas, cuyos enunciados me ha hecho el honor de enviarme. Le confieso que estos problemas me sobrepasan ampliamente y solo soy capaz de admirarlos y de suplicarle humildemente que dedique su primer momento libre a concluirlos». El problema de números al que se refería Pascal era el enunciado de uno de los más bellos teoremas propuestos por Fermat, que no fue demostrado hasta el

siglo XIX, y que dice así: «Todo número entero puede expresarse como suma de uno, dos o tres números triangulares; de uno, dos, tres o cuatro números cuadrados; de uno, dos, tres, cuatro o cinco números pentagonales, y así hasta el infinito».

En cambio, Pascal sí se interesó por otro problema de teoría de números que fue muy discutido en aquellos años: hallar una fórmula para sumar las potencias m-ésimas de los n primeros números naturales. No solo halló el resultado, sino que relacionó la solución con el triángulo aritmético, con la forma de razonar por recurrencia, e incluso con el incipiente cálculo infinitesimal. Aunque Pascal expresó la fórmula obtenida de forma verbal y sin usar símbolos, como solía hacer habitualmente, la relación hallada sería equivalente, en lenguaje moderno, a la expresión:

$$\binom{m+1}{1}\sum_{i=1}^{n} i^m + \binom{m+1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^{m-1} + \ldots + \binom{m+1}{m}\sum_{i=1}^{n} i = (n+1)^{m+1} - (n+1)$$

donde

$\binom{m+1}{k}$ significa un número combinatorio; por ejemplo $\binom{m+1}{1}$, que denota las combinaciones de $m+1$ elementos tomados de 1 en 1. Lo interesante de esta fórmula es que a partir de ella podemos despejar la suma de las potencias m-ésimas $\sum_{i=1}^{n} i^m$, quedando esta expresada en términos de las sumas del tipo $\sum_{i=1}^{n} i^k$ para los valores $k < m$.

Volviendo al conjunto de la correspondencia entre Pascal y Fermat, e incluyendo el tratado sobre el triángulo aritmético del primero de ellos, cabe hacer notar que el término «probabilidad», o «probabilidades», no aparece en la obra matemática pascaliana. En cambio, sí aparece en singular, tanto en *Les provinciales* como en los *Pensamientos*, que son obras de carácter filosófico. Tampoco aparece la expresión «cálculo de probabilidades», sino el término, «geometría del azar».

Puede sorprender que la temática del azar y el estudio de la incertidumbre sea un tema central en los *Pensamientos*, y en particular la referencia al término *parí* («apuesta»), para argumentar sobre temas que poco o nada tienen que ver con el juego. El ejemplo más relevante se halla en el famoso pasaje, hoy conocido como *parí de Pascal*, donde argumenta en términos probabilísticos por qué es mejor apostar por la existencia de Dios que por su negación.

En este punto, tan solo se añadirá que este tratamiento de las situaciones indecidibles a través de la idea de apuesta ventajosa tiene un carácter moderno, y en cierta manera muy adelantado a su tiempo, puesto que nos recuerda el uso que hace la teoría de juegos —cuyos inicios son del siglo XX— cuando trata de decidir cuál es la estrategia que hay que emplear para obtener la solución más ventajosa en una situación, utilizando la simulación de la misma en forma de juego, y donde el estudio de la probabilidad tiene un papel decisivo. Sin embargo, el propio Pascal era consciente de que con el todavía incipiente desarrollo matemático de la probabilidad, se precisaban otros métodos para abordar la incertidumbre, algo que hizo en su obra filosófica.

EL PROBLEMA DE LOS DADOS

Uno de los problemas que el caballero de Méré planteó a Pascal es el siguiente: si se lanzan n veces dos dados cúbicos, calcular el mínimo número de veces que hay que lanzarlos para que sea ventajoso apostar a la obtención de un doble 6, por lo menos.

Al parecer, el propio Méré le dijo a Pascal que, según sus apreciaciones, disponía de un cálculo teórico que indicaba que con 24 lanzamientos era suficiente, pero que su experiencia, después de jugar repetidamente a este juego, le indicaba que eran necesarios 25 lanzamientos.

Aunque se desconoce con exactitud el razonamiento del caballero de Méré para considerar que 24 era la solución teórica, lo cierto es que se necesitan 25 lanzamientos. Posiblemente se trate de una extensión incorrecta de la solución de otro juego más simple: calcular el mínimo número de veces que hay que lanzar un dado para que sea ventajoso apostar a la obtención de, por lo menos, un 6. Este problema era también conocido por Méré y no presentaba dificultad, ya que, en este caso, la solución teórica y la experiencia coincidían. Como la solución al segundo problema es 4, parecería razonable pensar que al lanzar dos dados basta

con multiplicar por 6 el número de lanzamientos, por lo que sería suficiente hacerlo 24 veces. Pero lo cierto es que se trata de dos juegos distintos y que la inferencia anterior no es correcta, como mostraron tanto Pascal como Fermat.

Los dos matemáticos resolvieron ambos juegos de manera similar, determinando el número de todos los casos posibles y aquellos que no son favorables. Así, para el lanzamiento de un solo dado determinaron que para $n = 4$ es favorable apostar a la aparición de, por lo menos, un 6. Los casos posibles son $6^4 = 1296$, y los no favorables $5^4 = 625$, es decir, calcularon los casos en que no sale ningún 6, que es el suceso complementario a obtener por lo menos un 6. Dado que $1296 - 625 = 671$ y $671/1296 > 1/2$, la probabilidad de obtener al menos un 6 es mayor que la mitad y, por lo tanto, se trata de un juego favorable, como afirmaba el caballero de Méré.

«El caballero de Méré tiene mucho talento pero no es un geómetra, y esto, como sabéis, es un gran defecto.»

— Blaise Pascal, carta a Pierre de Fermat, 29 de julio de 1654.

En cambio, para el caso del lanzamiento de dos dados, si se toma de nuevo $n = 4$, razonaron de la misma manera que en el anterior, pero haciéndolo de nuevo para este caso, puesto que no es posible inferir el resultado de uno de ellos a partir del otro. Ahora, los casos posibles son 36^{24} y los no favorables 35^{24}, de manera que la probabilidad buscada es $1 - (35/36)^{24}$, que en este caso es menor que 0,5, por lo cual se trata de un juego no favorable al que apuesta a favor de obtener por lo menos un doble 6.

Las dudas del caballero de Méré en relación con este problema quedaron así resueltas. La solución confirma que el planteamiento teórico del jugador era incorrecto, mientras que su intuición —dada por la experiencia— era acertada. Ambos matemáticos utilizaron el hecho de que la suma de las probabilidades de un suceso y de su contrario debe ser 1, propiedad de gran utilidad para la resolución de problemas de probabilidad.

EL PROBLEMA DEL REPARTO EN LA PARTIDA INTERRUMPIDA

Otro de los problemas propuestos por Pascal a Fermat es el «problema de la partida interrumpida», también conocido como *problème des partis*, es decir, problema de las partes o del reparto. Era conocido ya por Luca Paccioli y otros algebristas italianos, que aportaron diferentes soluciones, muchas de ellas erróneas o incompletas. Pascal se lo planteó a Fermat y le mostró su solución. Este le respondió con otra resolución totalmente distinta; ambas son correctas y al aplicarlas a distintos casos particulares dan el mismo resultado. Sin embargo, la resolución de Fermat tiene un carácter más general, ya que utilizaba la combinatoria (de modo que estaba dando la solución al problema para cualquier caso).

El enunciado general del problema es el siguiente: dos jugadores acuerdan que el primero que llegue a una cierta cantidad de puntos se llevará la totalidad de la cantidad apostada inicialmente. Cuando se han jugado un cierto número de rondas sin que ninguno de los dos haya alcanzado el número de puntos necesario para ganar, la partida se interrumpe. El problema estriba en cómo deberá repartirse en ese momento la cantidad apostada entre los dos jugadores.

Pascal planteó un caso particular con muy pocos puntos. Consideraba que la apuesta inicial realizada por cada jugador había sido de 32 *pistoles* —nombre utilizado en distintos países para referirse a los doblones— para una partida en la que gana el primero que obtiene tres puntos. Suponiendo que la partida se interrumpa cuando el primer jugador tiene dos puntos y el segundo un punto, razonó de la siguiente manera: si en la próxima jugada ganara el primero se llevaría las 64 pistolas, mientras que si ganara el segundo, ambos tendrían dos puntos, por lo que se repartirían las 64 pistolas en dos partes iguales, correspondiendo 32 a cada uno. Por lo tanto, el primer jugador puede argumentar: tengo aseguradas 32 pistolas, pase lo que pase, y para las otras 32 tengo la mitad de posibilidades de obtenerlas; por lo tanto, a mí me corresponden $32 + 32/2 = 48$ pistolas y al segundo jugador las 16 pistolas restantes.

Una vez dado el argumento para justificar la solución para este caso tan simple, Pascal aplicó una recurrencia para mostrar su validez en el caso que el primer jugador siga estando a un solo punto

de ganar y el segundo esté a dos, tres, cuatro...; luego, para el caso que el primer jugador esté a dos puntos y el segundo a tres, cuatro, cinco..., y así indefinidamente para cualquier caso. Esta manera de resolver el problema, y más en concreto el argumento desde el punto de vista de uno de los jugadores y la posterior recurrencia que permite generalizar el método para cualquier caso, muestra el ingenio de Pascal y da validez a su resolución.

Fermat, en cambio, resolvió el problema de una forma totalmente distinta: utilizaría la combinatoria para construir el espacio muestral, estudiando todas las posibles partidas desde la interrupción hasta un posible final, y aunque también se sitúa en un caso concreto, su resolución es más fácilmente generalizable, ya que al utilizar números combinatorios puede extenderse a un mayor número de jugadores, algo que a partir de la resolución de Pascal es mucho más difícil de hacer.

Sin embargo, para explicar su manera de resolver el problema, Fermat también se centró en un caso particular, concretamente el de que dos jugadores, J y K, interrumpen el juego cuando a J le faltan dos puntos para ganar y a K le faltan tres. En estas condiciones, Fermat razona así: como, en cualquier caso, el número máximo de jugadas que deberán realizar será de cuatro, hay que determinar todas las combinaciones en que J aparece dos o más veces y, por otro lado, todas aquellas en las que K aparece tres o más veces, que son excluyentes y en su conjunto dan todas las posibilidades. Así, estableció que el número de combinaciones con repetición de dos letras tomadas de cuatro en cuatro es 16, y de estas en 11 aparece J dos o más veces y solo en cinco casos K aparece tres o más veces. De aquí consideró que las probabilidades de ganar de J y de K están en la razón 11/5, por lo que esta tiene que ser la proporción en la que habrá de repartirse la cantidad total apostada. Si aplicáramos el razonamiento de Pascal para este caso llegaríamos a la misma solución, aunque con un poco más de trabajo.

En la versión publicada del *Tratado sobre el triángulo aritmético,* Pascal consideró que, en realidad, hay tres maneras de resolver el problema: la que él había utilizado, la presentada por Fermat —que se sirvió de la combinatoria— y la derivada del uso del triángulo aritmético, la cual, en realidad, no es ninguna de las analizadas

FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
El francés Joseph-Louis Lagrange mostró interés por el llamado «problema de la ruina del jugador» de Pascal.

FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
Blaise Pascal según una copia anónima de una pintura realizada por François II Quesnel.

FOTO INFERIOR:
Baruch Spinoza, filósofo y matemático que estudió la probabilidad, fue expulsado de la comunidad hebrea de Ámsterdam por sus ideas panteístas. Este lienzo de Samuel Hirszenberg (1907) recoge ese castigo.

en la correspondencia entre Pascal y Fermat. Finalmente, presentó una resolución sistemática del problema, relacionando el triángulo con los números combinatorios que él mismo había desarrollado en el apartado anterior de la citada obra, y de esta manera concluyó que si al jugador A le faltan r rondas para ganar la partida y al jugador B le faltan s, la cantidad apostada deberá repartirse de modo que al jugador A le corresponda la parte proporcional dada por el cociente:

$$\frac{\sum_{k=0}^{s-1}\binom{r+s-1}{k}}{\sum_{k=s}^{r+s-1}\binom{r+s-1}{k}}.$$

En la presentación que hace Pascal del problema en su *Tratado del triángulo aritmético*, el lenguaje utilizado recuerda más a un asunto de orden jurídico o incluso moral, sobre cuál será el reparto más «justo», que a una cuestión matemática. Sin embargo, en su resolución, todos estos elementos se dejan de lado y no intervienen en la misma, pues solo se usan argumentos matemáticos.

HUYGENS Y BERNOUILLI, LA REPERCUSIÓN DE LOS TRABAJOS SOBRE LA GEOMETRÍA DEL AZAR

Poco tiempo después, Christiaan Huygens (1629-1695), físico y matemático neerlandés, entró en contacto con el Círculo de París, a través del cual tuvo conocimiento de los trabajos de probabilidad de Pascal y Fermat, y se puso inmediatamente a trabajar en ellos, redactando un pequeño tratado en holandés y poco más tarde su versión latina, *De Ratiotiniis in Ludo Alae* (1657). Este fue el primer libro sobre el estudio de la probabilidad publicado, puesto que, como se ha dicho, el trabajo de Cardano no apareció hasta un siglo después de su redacción, y el de Pascal, aunque escrito en 1654, fue publicado póstumamente, en 1665. Por este motivo, durante mucho tiempo se consideró a Huygens como el iniciador de la teoría de la probabilidad.

Cabe decir en favor de Huygens que tenía un estilo expositivo

EL GENIO DE LAPLACE

Pierre-Simon de Laplace, retratado por su compatriota Pierre-Narcisse Guerin (1774-1833).

Pierre-Simon Laplace (1749-1827) fue uno de los grandes matemáticos y astrónomos del siglo XVIII. Después de estudiar matemáticas y teología ejerció como profesor en la Escuela Real Militar y más tarde en la Escuela Normal de París. Fue miembro de la Academia de Ciencias, que llegó a presidir. Durante la Revolución francesa, iniciada en 1789, colaboró en el establecimiento del sistema métrico decimal y trabajó en la elaboración del nuevo calendario republicano. Asimismo, figuró entre los fundadores del Bureau des Longitudes, departamento encargado de la regulación de los sistemas horarios y otras cuestiones astronómicas. Bajo el mandato de Napoleón ocupó diversos cargos y recibió la Legión de Honor (1805). Con la restauración borbónica, después de convertirse en defensor de Luis XVIII, fue nombrado marqués (1817). Su principal obra físico-matemática es el *Traité de mécanique céleste*, obra en cinco volúmenes publicados entre 1799 y 1825, con la cual completó los trabajos anteriores de Newton y otros sobre la gravitación universal, y probó la estabilidad del Sistema Solar.

El estudio de la probabilidad

En 1812 publicó *Theorie analytique des probabilités*, que puede considerarse la obra fundacional más influyente de cuantas se han escrito en este campo y con la que cosechó gran éxito. Dos años más tarde, con el *Essai philosophique sur les probabilités* (1814) presentó una argumentación completa y consistente sobre una concepción determinista del universo. A propósito de ella, el propio autor afirmó: «se ve en este ensayo que la teoría de las probabilidades no es otra cosa que el buen sentido aplicado al cálculo [...]. No hay ciencia más digna de nuestras reflexiones y cuyos resultados sean más útiles». En su honor se da el nombre de «regla de Laplace» a la fórmula para calcular la probabilidad de un suceso como el cociente entre casos favorables a que ocurra el suceso y el número de sucesos posibles del experimento. La regla es aplicable siempre que el conjunto de sucesos elementales que determinan el espacio muestral sean equiprobables. De esta ley pueden deducirse numerosas propiedades que rigen la probabilidad, como el hecho que esta toma valores entre 0 y 1, o bien que la suma de la probabilidad de un suceso y de la de su contrario es 1.

más claro que el de Pascal, y que al mismo tiempo realizó una elección más amplia de problemas relevantes. En todo caso, Huygens también era consciente de que se estaban sentando las bases de una nueva rama de las matemáticas, al afirmar en su obra: «El lector observará que nos ocupamos, no solo de los juegos, sino, más bien, de los fundamentos de una nueva teoría, profunda e interesante».

Huygens sometió sus primeros trabajos al Círculo de París, en 1656, y aunque la respuesta tardó algunos meses fue muy satisfactoria para él, pues tanto Pascal como Fermat tomaron en consideración sus desarrollos y le propusieron distintos problemas sobre probabilidad. En concreto, Pascal le envió un problema, Fermat otros dos y el propio Huygens enunció, supuestamente, otros dos; estos casos aparecieron como un anexo a la obra del neerlandés y durante más de medio siglo fueron abordados por relevantes matemáticos interesados por la probabilidad; muchos de ellos aportaron soluciones a alguna de tales propuestas, entre ellos Gottfried Leibniz, Jakob Bernouilli (1654-1705), Abraham de Moivre (1667-1754) y Baruch Spinoza (1632-1677).

A modo de ejemplo, Pascal le propuso el denominado «problema de la ruina del jugador», que incluía las soluciones halladas tanto por él como por Fermat, aunque no el método para alcanzarlas. Era el siguiente: A y B tienen cada uno 12 fichas y juegan con tres dados. Si se obtienen 11 puntos, A le da una ficha a B, y si se obtienen 14 puntos, B le da una ficha a A. Gana el primer jugador que logra tener todas las fichas. ¿Cuáles son las probabilidades de ganar que tienen ambos jugadores?

Después del problema del reparto, quizás este sea el más importante de los problemas sobre el azar planteados por Pascal, quien lo juzgaba como el más difícil de todos los propuestos. Su relevancia —y la diferencia con respecto a todos los planteados hasta aquel momento— estribaba en el problema del tiempo, es decir, cuánto tiempo tardará en finalizar la partida, ya que su duración es indeterminada, tal como estaba diseñado. Este problema interesaría, años más tarde, a dos grandes matemáticos franceses, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) y Simon Laplace (1749-1827).

Huygens respondió con prontitud aportando su propia solución, que consistía en considerar que sucedía en un tiempo determinado y luego ir aumentando dicho tiempo para hacerlo tender a infinito, de modo que la probabilidad de que A gane disminuía de manera constante.

Siguiendo un orden cronológico, después de Huygens hay que citar a Jakob Bernoulli (1654-1705), miembro de una familia de matemáticos afincada en Basilea desde 1622. Uno de los libros más importantes de Jakob Bernouilli es *Ars Conjectandi* (*El arte de la conjetura*), publicada póstumamente en 1713, donde prosiguió los estudios sobre la teoría de la probabilidad. Esta obra, considerada como el primer tratado sistemático sobre probabilidad, fue escrita entre 1684 y 1689. Además de aportar nuevos resultados relevantes, el autor realizó una síntesis organizada de los conocimientos sobre probabilidad de tu tiempo, incluyendo los hallazgos de Cardano, Pascal, Fermat y Huygens. En cuanto al contenido, cuenta con un estudio detallado sobre combinatoria, así como una primera definición del concepto de probabilidad.

En el teorema que lleva su nombre, Jakob Bernoulli formuló una versión inicial de la ley de los grandes números, que relaciona la probabilidad teórica con la frecuencia relativa con la que se da un suceso en un experimento. Una formulación aproximada de este teorema dice así: «Cuando repetimos un experimento un elevado número de veces, la frecuencia relativa con que este aparece es muy poco probable que se aparte de su probabilidad teórica».

Este teorema, que constituye una de las leyes fundamentales de la probabilidad, fue formulado de manera definitiva por Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) y analizado experimentalmente por los matemáticos franceses Georges Louis Leclerc, conde de Buffon (1707-1788) y, ya en el siglo XIX, Simeon Denis Poisson (1781-1840).

A partir de la publicación de *Ars conjectandi*, puede afirmarse que la teoría de la probabilidad es una nueva rama de las matemáticas.

CAPÍTULO 6

Contribuciones al cálculo infinitesimal

Un buen número de importantes matemáticos del siglo XVIII abordó, de una manera u otra, el descubrimiento del cálculo infinitesimal, uno de los grandes avances de la época. Aunque Isaac Newton y Gottfried Leibniz hicieron las aportaciones más significativas a este ámbito de las matemáticas, antes que ellos Pascal, Descartes, Fermat, Roberval, Barrow y Wallis habían realizado contribuciones destacables.

Refiriéndose a la invención del cálculo infinitesimal, Leibniz llegó a decir que fue leyendo uno de los trabajos de Pascal como se le hizo la luz. Lo cierto es, sin embargo, que la obra de Pascal en este campo carece de la relevancia alcanzada por sus trabajos en el cálculo de probabilidades. Y es posible que su importancia sea menor también a la de sus contribuciones a la geometría proyectiva. Sin embargo, los trabajos en cálculo infinitesimal completan la producción matemática de Pascal y muestran que, quizá con la única excepción de la teoría de números, donde él mismo reconocía no estar al mismo nivel que su colega Fermat, hizo aportaciones relevantes en los distintos campos de las matemáticas de su tiempo.

Los últimos trabajos matemáticos de Pascal se pueden enlazar con los primeros, ya que también se refieren a la geometría y concretamente al estudio de la cicloide, que Pascal denominó con el nombre francés de la época, *roulette*, curva que interesó a diversos pensadores del siglo XVII. Esta puede definirse como la trayectoria que describe un punto de una circunferencia cuando esta rueda, sin deslizarse, sobre una línea recta. La diferencia esencial es que los primeros trabajos versaban sobre la geometría proyectiva, recientemente desarrollada por Gérard Desargues (1591-1661), y los postreros se enfrentaron a los nuevos métodos para tratar los infinitésimos, dadas las características de la curva estudiada. En todo caso, el respeto por los antiguos, ya sea Euclides en sus trabajos

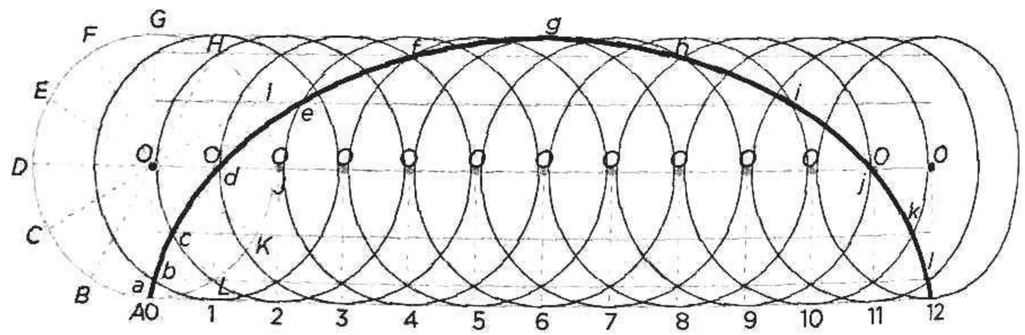
iniciales o Arquímedes en los últimos, fue una característica de toda la obra de Pascal, sobre todo cuando se trataba de hacer demostraciones, o de introducir nuevos métodos cuya validez debía establecerse siempre por comparación con los antiguos.

SOBRE LOS ORÍGENES DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

Durante el siglo XVII, el cálculo estuvo esencialmente vinculado a la investigación sobre curvas. Se insistió inicialmente en las curvas conocidas por los griegos (las cónicas de Apolonio, la concoide de Nicomedes, la cisoide de Diocles o la espiral de Arquímedes, entre otras), pero enseguida esta colección se vio complementada por una diversidad de nuevas curvas, entre las que sobresalen las parábolas, hipérbolas y espirales de orden superior, llamadas de Fermat; el *folium* de Descartes; la espiral logarítmica; el caracol de Pascal (en honor a Étienne, padre de Blaise Pascal) y, ante todo, la cicloide, la reina de todas las curvas, también llamada la «Helena de los geómetras», quizá por las numerosas disputas que generaron las soluciones de los principales problemas planteados sobre esta curva.

LA CICLOIDE Y SUS PROPIEDADES FÍSICAS

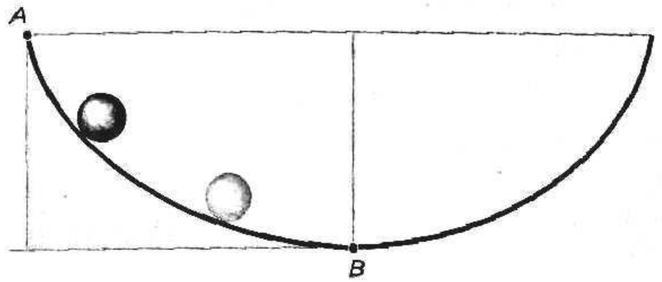
Aunque no está claro el origen de la curva cicloide, Galileo fue el primero en estudiarla en profundidad y en utilizar el nombre con el que se la conoce. También Descartes, Fermat, Roberval, Newton, los hermanos Bernouilli y, por supuesto, Pascal, entre otros, se ocuparon del estudio de la cicloide. Su interés sobrepasa el terreno estricto de las matemáticas para adentrarse en el campo de la física, puesto que entre sus muchas propiedades hay dos que ocupan un lugar preferente: la «tautocronía» (igualdad de tiempo) y la «braquistocronía» (mínimo tiempo).



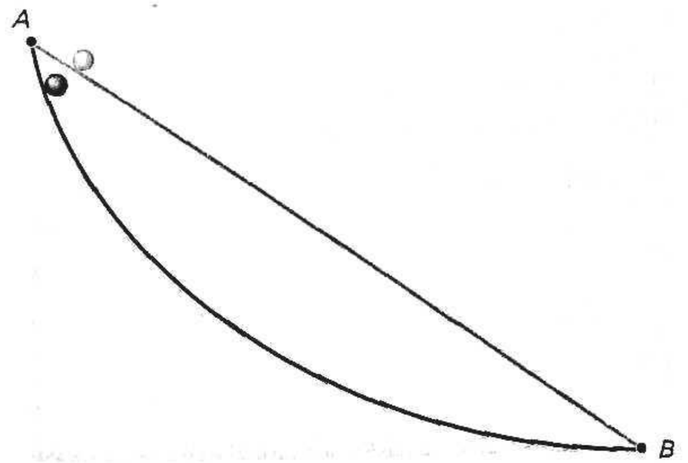
La cicloide es la curva descrita por un punto fijo de una circunferencia cuando esta rueda, sin deslizarse, sobre el eje de abscisas.

En 1673, Christiaan Huygens descubrió una propiedad que le pareció extraordinaria: si se deja caer una bola de modo que se desplace a lo largo de una cicloide invertida, en caída libre, el tiempo que tardará en llegar al punto más bajo de la curva es independiente del lugar desde donde empezó a caer. Por esto se dice que la cicloide es una curva que tiene la propiedad de ser «tautócrona».

Por otra parte, pocos años más tarde Johann Bernoulli descubrió otra propiedad, acaso más sorprendente que la anterior, que se puede definir diciendo que la cicloide es la curva de descenso más rápido. Es decir, si entre dos puntos *A* y *B* trazamos varias curvas (por ejemplo, una línea recta, un arco parábola, un arco circunferencia, etc.) y dejamos caer desde *A*, en el mismo momento, una bola por cada una de ellas, la bola que llegará antes al punto *B* será la que seguirá la trayectoria de la cicloide. Esta propiedad se conoce con el nombre de «braquistocronía» y en la demostración de la misma participaron Johann y Jakob Bernoulli, Leibniz y Newton, entre otros.



Si se sueltan las dos bolas en el mismo momento, ambas llegarán al punto más bajo también en el mismo momento.



La bola que describe la trayectoria de la cicloide tarda menos tiempo en ir de *A* a *B*, que la que desciende por el plano inclinado, a pesar de que su recorrido es mayor.

LA ACTIVIDAD CIENTÍFICA DE LOS ÚLTIMOS AÑOS DE LA VIDA DE PASCAL

Como ya se comentó, Pascal cesó su actividad científica a finales de 1654, a raíz de la llamada «segunda conversión», tras la cual se dedicó de manera casi exclusiva a la redacción de dos de sus principales obras de carácter filosófico y religioso, *Les provinciales*, primero, y los *Pensamientos*, más tarde. Su regreso al estudio de las matemáticas, tras un breve contacto en 1656 con problemas sobre probabilidad a causa de las peticiones indirectas de Huygens sobre dicho tema, tuvo lugar en 1658. En este año, Pascal, después de escribir los *Éléments de géométrie*, texto dirigido a las escuelas de Port Royal, redactaría tres estudios breves sobre la *ruolette* (cicloide) que culminarán en la llamada *Histoire de la ruolette*. Se dice que este reencuentro con las matemáticas, para ocuparse de una cuestión geométrica, fue un intento de aliviar —o tratar de olvidar— los fuertes dolores de muelas que padecía. Todavía en diciembre de 1658 escribió *Suite de l'histoire de la roulette*, a la cual añadiría un apéndice en enero de 1659. Este fue el último trabajo científico de Pascal, que se encontraba gravemente enfermo, a pesar de lo cual se dedicó a la redacción de los *Pensamientos*. Durante sus últimos tres años —murió el 19 de agosto de 1662— solo constan unos pocos contactos con la actividad matemática y científica, como una carta a Fermat de agosto de 1660 y una visita de Huygens en diciembre de 1661.

A esta actividad postrera en el campo de las matemáticas, ciertamente reducida pero intensa y concentrada, habría que añadir la redacción de un conjunto de opúsculos y cartas firmadas con el nombre de Amos Dettonville, pseudónimo que a su vez es un anagrama de Louis de Montalte, el alias utilizado por Pascal en las *Provinciales*.

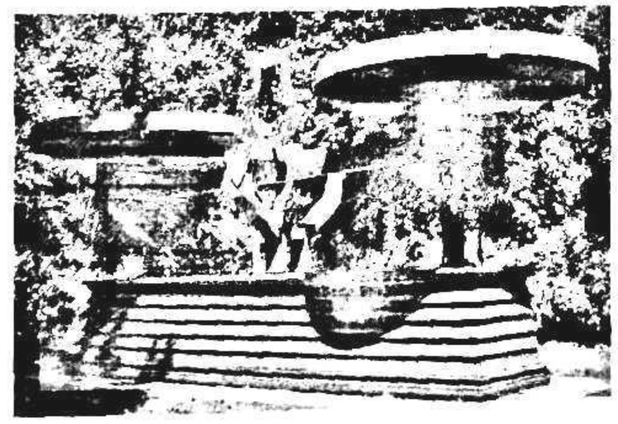
El más famoso de tales folletos, de los que el autor mandó imprimir un número reducido de ejemplares, es el primero, que data de junio de 1658, en el cual convoca un concurso con dos premios —uno de 40 y otro de 20 pistolas— para los mejores trabajos sobre la resolución de problemas relativos a la cuadratura y la rectificación de la cicloide, así como el cálculo de volú-

ROBERVAL Y LA TROCOIDE

Amigo de Fermat y miembro del círculo de Mersenne, Gilles Personne de Roberval ganó en 1634 una cátedra en el reconocido College Royal que debía renovar cada tres años, hasta que en 1655 le fue concedida la cátedra de forma vitalicia. Enseñó matemáticas, física y astronomía, y tanto sus clases como sus conferencias tuvieron un gran prestigio en su época. Sin embargo, su origen modesto, su carácter agrio y polemizador, sobre todo con Descartes, y sus fuertes y numerosas disputas con diversos contemporáneos hicieron que no fuera suficientemente apreciado. A pesar de ello fue uno de los siete sabios que fundaron en 1666 la Academie Royale des Sciences y uno de sus más activos miembros en los primeros años. Fue en tal institución donde Roberval presentó en 1669 la hoy conocida como «balanza de Roberval», que pronto se hizo célebre. Esta balanza, basada en el principio del paralelogramo para la distribución de las fuerzas, cuya regla estableció, está constituida por un paralelogramo deformable que permite que los platos de la balanza permanezcan siempre horizontales.

Roberval, matemático

En el campo de las matemáticas son relevantes sus contribuciones al inicio del cálculo infinitesimal y, en concreto, sus trabajos sobre cuadraturas, es decir, cálculo de áreas y cálculo de volúmenes de revolución, a partir del llamado «método de los indivisibles», que también desarrollaron los italianos Cavalieri y Torricelli. En particular, encontró en 1637 la cuadratura de un arco cualquiera de la cicloide. Sin embargo, el hecho de no haber publicado durante su vida ninguno de sus trabajos hizo que fueran otros los que figurasen como los primeros resolutores de muchos problemas; este es el caso, por ejemplo, de Cavalieri y el método de los indivisibles. Así, sus principales trabajos de matemáticas fueron publicados póstumamente por la Academia, en 1693, como es el caso de la *Geométrié des indivisibles*, o el tratado sobre la *Trocoide*. Este nombre, del propio Roberval, se refiere a la curva descrita por un punto solidario a un círculo, cuando este gira sobre una recta. La cicloide es un caso particular de trocoide, al considerar el punto sobre la circunferencia y no suponerlo interior, o exterior, al círculo.



Balanza de Roberval de tamaño gigante, instalada como homenaje a su creador en Roberval, la localidad de origen del matemático francés.

menes de cuerpos de revolución obtenidos de aquella. En concreto, planteaba nueve cuestiones agrupadas en tres bloques: 1) sobre el área bajo un arco de cicloide y su centro de gravedad; 2) sobre los volúmenes generados por rotación alrededor de los ejes horizontal y vertical y 3) sobre los centros de gravedad de los sólidos obtenidos al cortar los volúmenes anteriores por planos meridianos.

Solo se recibieron dos respuestas, una del jesuita y matemático francés Antoine de Laloubère (1600-1664) y otra del arquitecto y científico británico Christopher Wren (1632-1723), con algunos resultados no completos. Ambos se molestaron porque el concurso fue declarado desierto. Por otro lado, los matemáticos italianos se enojaron con Pascal, ya que este, en *Histoire de la roulette*, centró el mérito de los trabajos realizados sobre la cicloide en su amigo Roberval, dejando sin citar los también relevantes trabajos de Torricelli, fallecido pocos años antes. En todo caso, y aunque tanto Roberval como Torricelli ya habían resuelto algunos problemas sobre la cicloide, en particular la cuadratura, lo cierto es que no los publicaron, de modo que, cuando Pascal dio a conocer su *Histoire de la roulette*, junto con los documentos añadidos posteriormente a la misma, la mayoría de resultados aparecen impresos por primera vez.

Las cuestiones propuestas por Pascal se referían básicamente a la cuadratura, la rectificación y el cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución generados por la propia cicloide. Recordemos que rectificar una curva, o un arco de la misma, significa hallar su longitud, mientras que cuadrar una superficie significa calcular su área; ambos términos provienen de la interpretación que sobre el cálculo de longitudes y de áreas hicieron los antiguos griegos. Estas cuestiones suscitaron gran interés entre muchos matemáticos de la época, algunos de los cuales ya estaban trabajando en las mismas.

El lapso de tiempo que Pascal dedicó a la cicloide y otras cuestiones sobre el cálculo infinitesimal duró poco más de medio año. Al parecer, empezó a trabajar en el tema sin conocer a fondo lo que se había hecho sobre el mismo, y a partir de ciertas críticas tuvo que rectificar, en el sentido de no atribuirse ciertos resultados.

Por ejemplo, resulta sorprendente que aun considerando a Roberval como el mejor conocedor de la cicloide (incluso le hizo miembro del tribunal del concurso, para que evaluara las soluciones recibidas), no tuviera en cuenta que algunas de las cuestiones propuestas ya habían sido resueltas por este, aunque no publicadas. Este error fue subsanado en la llamada «segunda circular», en la que precisaba y modificaba algunas propuestas del concurso, eliminando la rectificación y la cuadratura y centrándose en los volúmenes y en los centros de gravedad.

En cuanto a las cartas y documentos firmados bajo el pseudónimo Dettonville, el más importante fue la misiva dirigida a Carcavi, que incluía no solo algunos resultados sobre la cicloide y los centros de gravedad, sino también un pequeño pero muy relevante trabajo sobre los senos de un cuadrante de círculo.

Junio de 1658	Primera circular sobre la *roulette*.	Concurso de problemas.
Julio de 1658	Segunda circular sobre la *roulette*.	Precisiones y modificaciones sobre el concurso.
Septiembre de 1658	Cartas a Lalouère y a Wren, únicos participantes en el concurso.	Justificación sobre el resultado del concurso.
Octubre de 1658	Tercera circular sobre la *roulette*.	Presentación de resultados sobre los problemas de la *roulette*, sin demostraciones.
Octubre de 1658	*Histoire de la roulette*.	Texto en latín y después en francés.
Diciembre de 1658	Carta de Dettonville al sr. A.D.D.S.	
Diciembre de 1658	*Suite de l'histoire de la roulette*.	Texto en francés y después en latín.
Diciembre de 1658	Carta de Dettonville a Carcavi.	Incluye diversos tratados, entre ellos el *Método para determinar los centros de gravedad*.
Enero de 1659	Carta de Dettonville a Huygens.	
Enero de 1659	Anexo a *Suite de l'histoire de la roulette*.	
Enero de 1659	Carta de Dettonville a ¿?	Contiene algunas de sus últimas creaciones en geometría.

Principales documentos (folletos, publicaciones y cartas con pseudónimo) redactados por Pascal durante la segunda mitad del año 1658 y principios de 1659, cuyo conjunto constituyen su trabajo alrededor del cálculo infinitesimal.

Dado el carácter fragmentario de las obras relacionadas y el hecho de que unas complementan a otras con precisiones, ampliaciones o revisiones de carácter diverso, para desarrollar el conjunto de trabajos realizados por Pascal en relación con el cálculo infinitesimal no seguiremos el orden establecido por sus obras, sino que organizaremos los apartados de acuerdo con los grandes temas del cálculo, y rastrearemos en las distintas obras sus principales aportaciones.

EL ESTUDIO SOBRE LA CICLOIDE: RECTIFICACIÓN Y CUADRATURA

Parece ser que Pascal, cuando propuso el concurso, ya había estado trabajando en la *roulette* sin dar a conocer sus resultados. Su sobrina Marguerite Périer contó una anécdota en sus memorias que se ha hecho célebre:

> Tuvo un gran dolor de muelas y pensó en dedicarse a alguna cosa que le pudiera hacer olvidar el dolor. Entonces pensó en la proposición de la *roulette* hecha por Mersenne, que nadie había podido encontrar. Trabajó en ella hasta encontrar la solución y todas las demostraciones. Esto logró detener el dolor y cuando a la mañana siguiente le visitó M. de Roannez, le dijo que le había curado la *roulette* que él había buscado y encontrado.

Todo parece indicar que, después de proponer el concurso, tuvo que apresurarse a dar a conocer sus resultados en sucesivos trabajos: *Histoire de la roulette*, *Suite de l'histoire de la roulette*, y un anexo a este último trabajo. En realidad publicó sus respuestas a los nueve desafíos propuestos por él mismo, en octubre de 1658, solo tres meses después de proponer el concurso. Podríamos decir que su obra sobre la cicloide representa al mismo tiempo el final de una época. Así debe leerse por su apego a los métodos geométricos y el interés por mostrar que los nuevos métodos eran similares a infinitesimales para realizar cuadraturas, como veremos más adelante. Sin embargo y aunque estuvo cerca, Pascal no llegó a vislumbrar la importancia de

estos nuevos métodos, en particular la relación entre el problema de las tangentes (derivadas) y el de las cuadraturas (integrales).

DERIVADAS E INTEGRALES

Los problemas de rectificación de curvas presentaban, en general, mayores dificultades que las cuadraturas.

Después del círculo, la primera curva rectificada fue la espiral logarítmica, realizada por métodos cinemáticos por Torricelli y Roberval en 1640. El propio Roberval y Wren hicieron lo mismo con la cicloide, hacia 1658. En las mismas fechas, Pascal obtuvo la igualdad de la longitud de la espiral de Arquímedes, con la curva de una parábola (así quedó registrado en *Egalité des lignes spirale et parabolique*, en *Les lettres de A. de Dettonville*). Y por esa época halló también la rectificación de la cicloide, con lo cual demostró que la longitud de esta curva es igual a cuatro veces el diámetro de la circunferencia generatriz.

Uno de los resultados notables del trabajo de Pascal, totalmente nuevo, fue el establecimiento de la igualdad entre la longitud de un arco completo de cicloide generalizada, que en lenguaje moderno se expresa mediante las ecuaciones:

$$x = a\,K\,\Phi - a\,\operatorname{sen}\Phi$$

$$y = a - a\,\cos\Phi,$$

y de la semielipse dada por:

$$x = a\,(1+K)\,\cos\Phi$$

$$y = 2a\,(1-k)\,\operatorname{sen}\Phi.$$

Muy poco después, en 1659, Fermat escribió un tratado general sobre rectificación, en el cual, a partir de sus cuadraturas, logró rectificar una familia infinita de curvas, resultado que, en cierta manera, empequeñeció los resultados logrados por Roberval y Pascal.

En relación con la cuadratura, el área de la cicloide es tres veces la del círculo que la genera. Torricelli contaba que su maestro Galileo la descubrió utilizando un método empírico, y fue Roberval quien en 1634 había dado una primera demostración que sin embargo no publicó, como sucedía a menudo en esta época.

Cuando Pascal fue consciente de que algunos resultados sobre la cicloide ya los habían realizado otros matemáticos, en particular Roberval, pero también Torricelli y Fermat, centró sus aportaciones en el cálculo de volúmenes, la determinación de los centros de gravedad y la determinación de senos en un cuadrante, donde utilizaría el triángulo característico y por única vez se refirió a las tangentes.

APORTACIONES DE PASCAL AL CÁLCULO INFINITESIMAL

Aunque los trabajos sobre la cicloide fueron importantes para el avance del cálculo infinitesimal, no es posible limitarse al estudio de esta curva para comprender las aportaciones de Pascal al desarrollo inicial de dicho cálculo. En otras creaciones matemáticas suyas de esta misma época —por ejemplo, en el tratado sobre los senos de un cuadrante de círculo— hay aportaciones muy relevantes que permiten vislumbrar cuáles eran sus ideas en este campo y hasta dónde llegaron sus aportaciones, aunque a menudo de manera dispersa y muchas veces sin que se pueda constatar que Pascal fuera consciente de la potencia de algunas de las propiedades que descubrió y aplicó.

SOBRE EL PENSAMIENTO INFINITESIMAL DE PASCAL

No hay constancia de que Pascal se ocupara de problemas relacionados con la determinación de tangentes, ni del problema general subyacente, que llevará al concepto de derivada. Los problemas que le interesaban atañían al cálculo de sumas, el cálculo de áreas y volúmenes y las integrales requeridas para ello, así como los problemas relativos a las rectificaciones (cálculo de arcos) y a los centros de gravedad.

Como ya hemos comentado en más de una ocasión, Pascal rehuía el uso del simbolismo algebraico, bastante desarrollado en su época desde los trabajos de Viete, Fermat y Descartes. Por ello se mantuvo atado al lenguaje geométrico —y, si era necesario, mecánico— para todo lo referido a los infinitésimos, a pesar de lo cual logró importantes resultados.

Otro aspecto importante es la forma como interviene el concepto de función en la obra de Pascal. Aunque no se encuentra claramente explicitada, el artilugio que utiliza para su representación, *le triligne rectangle*, permite expresar una curva general, podríamos decir una función general, mientras que Descartes solo consideraba las curvas que admiten una expresión algebraica, las cuales corresponden a funciones analíticas, además de las curvas mecánicas, generadas por movimientos, como la cicloide.

Por *triligne rectangle*, Pascal entendía una curva continua representada entre dos segmentos, uno horizontal, llamado base, y otro vertical, conocido como eje. Los segmentos paralelos al eje que van de la curva a la base recibían diversos nombres: «ordenada a la base«, «distancia a la base» o también «seno sobre la base» (un uso del término seno distinto del moderno).

SOBRE EL USO DE LOS INDIVISIBLES

En el momento en que Pascal abordó los trabajos de cálculo infinitesimal, se mostró favorable al uso de los indivisibles de Cavalieri, doctrina que ofrecía un método general para el cálculo de áreas y volúmenes, o mejor dicho, para establecer una equivalencia entre dos áreas, si se puede establecer una igualdad término a término entre elementos infinitesimales (los indivisibles), llamados líneas en el caso de las superficies. El método, superior a la exhaución de los antiguos, generó muchas discusiones y tenía varios detractores, ya que, a pesar de ser muy ingenioso y brillante, podía

conducir a establecer resultados incorrectos, especialmente si al «integrar» (sumar los indivisibles) con respecto a una variable x, el dx (es decir, el lado infinitamente pequeño del indivisible) no era el mismo en los dos términos, algo que podía suceder en ciertas comparaciones entre figuras.

Pascal estaba al corriente de estas discusiones y las precauciones que tomó en sus demostraciones muestran que era consciente del peligro de cometer errores. A pesar de ello, utilizaría este recurso de los indivisibles, pero, a diferencia de sus predecesores, Cavalieri y Torricelli, indicó que cuando hablaba de una «línea», esta se sobrentendía como un rectángulo infinitesimal. Por ello afirmó en su carta a Carcavi:

> He querido hacer esta advertencia para mostrar que todo lo que está demostrado por las verdaderas reglas de los indivisibles, se demostrará también con el rigor y a la manera de los antiguos (como Arquímedes), y que así, ambos métodos no difieren más que en la manera de hablar; [...] y por este motivo no tendré ningún problema en adelante, para hablar de la suma de líneas o la suma de planos.

En resumen, Pascal manejaba de modo efectivo y correcto el método de los indivisibles, aunque siempre que podía lo relacionaba con lo que hacían los antiguos, reforzando así la validez de los nuevos métodos.

CAVALIERI Y EL MÉTODO DE LOS INDIVISIBLES

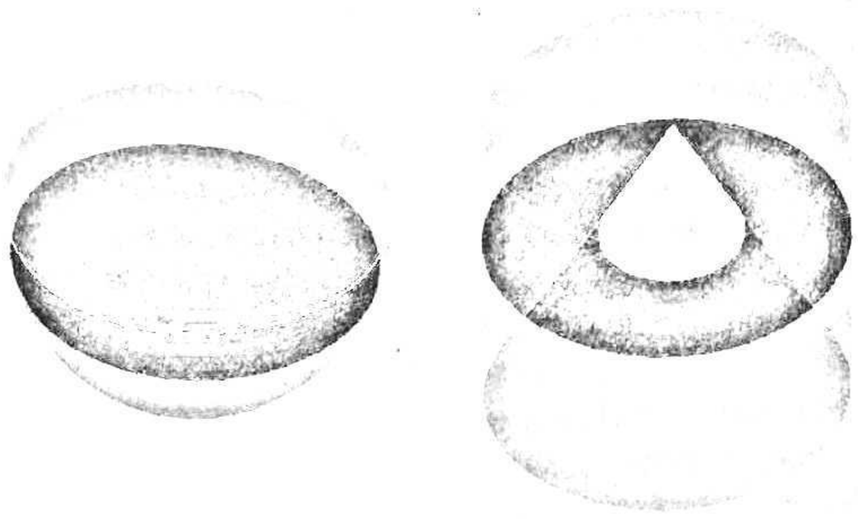
Bonaventura Cavalieri (1598-1647) fue un matemático y religioso italiano. Gracias a sus trabajos sobre los indivisibles se le considera uno de los precursores del cálculo infinitesimal. Discípulo de Galileo Galilei, en 1629 obtuvo una plaza para enseñar matemáticas en Bolonia. Allí introdujo los logaritmos recién creados en paralelo por el escocés John Napier (1550-1617) y el suizo Joost Bürgi (1552-1632). En 1635 publicó su obra más importante, *Geometria indivisibilibus continuorum quadam nova ratione promota*. En ella expuso el método de los indivisibles, entendidos como descomposiciones infinitas ya sea de superficies, en cuyo caso los indivisibles se llaman líneas, o bien de volúmenes, que corresponden a planos. Entonces, la suma de la medida de una infinidad de indivisibles permite determinar la medida de una superficie o de un volumen. En realidad, este método permite calcular integrales definidas, tratando de evitar el problema del paso al límite. Aunque muchos matemáticos posteriores, entre ellos Torricelli o Pascal, lo utilizaron, tuvo detractores que argumentaban la falta de rigor del método. Lo cierto es que al utilizar los indivisibles y realizar las sumas infinitas hay que vigilar cómo se establecen los infinitésimos para no cometer errores.

La efectividad de los indivisibles

Para lograr que la teoría de los indivisibles fuera una herramienta potente para el cálculo de áreas y volúmenes formuló el que hoy conocemos como «principio de Cavalieri», una ley geométrica que permite establecer la equivalencia de volúmenes de dos cuerpos (también la de áreas de superficies) por comparación de secciones, y que podemos enunciar de la siguiente manera: si dos cuerpos de una misma altura los cortamos por secciones planas y resulta que el área de cada una de las secciones de uno de los cuerpos es igual al área de su correspondiente en el otro cuerpo, los volúmenes de los dos cuerpos son iguales (entendemos por sección correspondiente la que está a una misma altura). Una aplicación de este principio permite, por ejemplo, calcular el área de una esfera, al establecer que las secciones planas a una semiesfera de radio r son iguales a las secciones planas de un cilindro menos un cono, ambos de radio y altura r. Una vez probada la equivalencia de las secciones resulta que:

Volumen de la semiesfera = volumen del cilindro − volumen del cono

$$Ve = 2\,(\pi r^2 \cdot r - \pi/3\, r^2 \cdot r) = 4\pi/3\, r^3.$$



Igualdad de las secciones de la semiesfera y diferencia entre el cilindro y el cono.

En cuanto al paso al límite que implica toda operación de integración (de suma de infinitésimos), por el hecho de partir de un número de divisiones de la superficie a integrar y aumentar hasta el infinito estas divisiones, Pascal lo utilizaba sistemáticamente, pero precisando a menudo que esta operación es legítima. Así mismo, destacó que en este paso al límite hay que tener en cuenta los «órdenes de magnitud», de manera que será posible despreciar las cantidades de orden inferior: «Así, la raíz no cuenta en relación al cuadrado, de modo que se puede prescindir de las cantidades de orden inferior al considerarlas como nulas».

«Todo lo que está demostrado por las verdaderas reglas de los indivisibles, se demostrará también con el rigor y a la manera de los antiguos y así ambos métodos no difieren más que en la manera de hablar.»

— Pascal, a propósito del uso de los indivisibles de Cavalieri.

SOBRE LA CUADRATURA BÁSICA Y LAS CUADRATURAS ARITMÉTICAS

El primer gran objetivo de las técnicas para las cuadraturas en el siglo XVII pretendía el establecimiento de la llamada cuadratura básica $\int x^k\,dx$, para x entre 0 y a, es decir la integral definida de las funciones dadas por los polinomios x^k, para $k = 1, 2, 3...$ lo que equivale a calcular el área bajo cada una de estas curvas, desde $x = 0$ hasta $x = a$.

Podría decirse que los métodos desarrollados son artificios aritmético-infinitesimales que pretenden superar los clásicos procedimientos de exhaución de los antiguos. Arquímedes, en la cuadratura de la parábola, ya había llegado a las fórmulas para la suma de los sucesivos enteros y también la de sus cuadrados, cuyas expresiones hoy escribimos así:

$$1+2+\ldots+n = n\,(n+1)\,/\,2,$$

y también

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = n\,(n+1)\,(2n+1)\,/\,6.$$

A partir de ello había establecido resultados equivalentes a las integrales definidas entre 0 y a, que en lenguaje moderno expresamos de la siguiente manera:

$$\int_0^a x\,dx = a^2\,/\,2$$

y también

$$\int_0^a x^2\,dx = a^3\,/\,3.$$

Hoy estableceríamos estos mismos resultados mediante el cálculo de los siguientes límites para n tendiendo a infinito:

$$\lim\ (1 + 2 + \ldots + n)\,/\,n^2 = 1/2 \text{ y también,}$$
$$\lim\ (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)\,/\,n^3 = 1/3.$$

Con su método sobre los indivisibles publicado en 1635, Cavalieri logró realizar la cuadratura de x^k para k= 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 9. Pocos años después, Fermat, Roberval, Pascal, Torricelli y Wallis dieron pruebas generales para el cálculo del área de la llamada «parábola generalizada», cuya expresión es $y = x^k$, para k entero positivo.

Aunque la demostración de Pascal no fue la primera, le sigue un interesante razonamiento de paso al límite, a partir de las fórmulas obtenidas para las sumas de potencias (suma de los sucesivos enteros positivos, de sus cuadrados, de sus cubos, etc.).

Las líneas principales del razonamiento de Pascal se expresan con las siguientes palabras, en las que, como es habitual en sus obras, no utiliza lenguaje simbólico: «Aquellos que estén al corriente de la doctrina de los indivisibles, constatarán que de los resultados precedentes [se refiere a las expresiones para las sumas de potencias] se pueden establecer áreas curvilíneas. En particular, permiten cuadrar inmediatamente todo tipo de parábolas [se refiere a las curvas de la forma x^k] y una infinidad de otras curvas».

Si, por lo tanto, extendemos a las cantidades continuas los resultados hallados para los números siguiendo el método expuesto, podemos enunciar las siguientes reglas: 1) la suma de un cierto número de líneas es al cuadrado de la más grande como 1 es a 2 (esta es la curiosa forma de expresar que el área bajo una función $y = x$, para x entre 0 y a, es $1/2\ a^2$); 2) la suma de los cuadrados de las mismas líneas es al cubo de la mayor, como 1 es a 3 (como antes, ahora expresa de esta manera que el área bajo una función $y = x^2$, para x entre 0 y a, es $1/3\ a^3$), y 3) la suma de las mismas potencias de un cierto número de líneas es a la potencia de grado inmediatamente superior de la mayor de entre ellas, como la unidad es al exponente de esta potencia (es decir, el área bajo una función $y = x^k$, para x entre 0 y a, es $1/(k+1)\ \ a^{k+1}$).

Pascal finalizó el descubrimiento de estos resultados con esta observación de corte filosófico: «Quería añadir algunos comentarios, familiares a aquellos que practican los indivisibles, con la finalidad de resaltar las relaciones admirables que la naturaleza, imbuida de unidad, establece entre las cosas más distantes en apariencia. Ella se muestra en estos ejemplos donde encontramos el cálculo de magnitudes continuas relacionarse con la suma de potencias numéricas».

SOBRE LAS PROPIEDADES ADITIVAS DE LA INTEGRACIÓN

En sus trabajos sobre la cicloide, Pascal utilizaría las nociones y métodos que hemos descrito, pero también otras propiedades por vez primera. Una de ellas puede enunciarse diciendo que la integral de una suma de funciones es la suma de integrales de cada una de estas funciones. Aunque tanto Fermat como Roberval ya la habían utilizado, el interés de su uso por parte de Pascal es que, a pesar de seguir considerando solo magnitudes geométricas, lo hizo de una manera más libre que en sus anteriores trabajos, acercándose, acaso por vez primera, a una actitud algebraica que hasta entonces casi siempre había evitado. Así, escribió igualdades entre sumas de segmentos rectos y de arcos, teniendo en cuenta la longitud y prescindiendo de la posición.

Diversas propiedades fundamentales de la cicloide dieron lugar a igualdades en las que Pascal aplicaría la propiedad aditiva de la integración. Por ejemplo, una de ellas puede enunciarse, en palabras de Pascal, de la siguiente forma: «Cada ordenada en el eje de la *demi roulette* (semicicloide) es igual a la ordenada del semicírculo generador, más el arco del mismo círculo comprendido entre la ordenada y el vértice superior».

De acuerdo con la figura 1, Pascal nos dice que $ZY = ZM$ + arco CM y llama al segundo término de la igualdad una línea mixta.

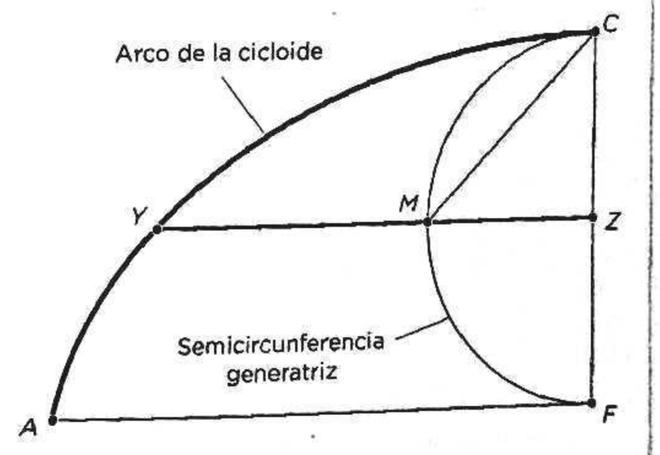
Otra de las propiedades, fundamental para la rectificación de la cicloide, dice: el arco de la *roulette* desde el vértice es igual al doble de la cuerda correspondiente del círculo generador. Es decir, de acuerdo con el dibujo anterior: arco $CY = 2\ CM$.

Estas propiedades permitirán a Pascal transformar las integrales relativas a la cicloide en integrales relativas al círculo generador, y con ello determinar la cuadratura de un arco de cicloide, pero también las utilizará para determinar la superficie generada por la rotación de este arco, tanto alrededor de la base como del eje de ordenadas. Al realizar este trabajo se encontrará con la necesidad de integrar una línea mixta y su cuadrado, y después sumarlos, de modo que necesariamente deberá realizar un trabajo de tipo algebraico, a pesar que su lenguaje siga siendo geométrico.

Propiedades para la rectificación de la cicloide.

El desarrollo completo realizado por Pascal es largo y complejo de seguir, sobre todo porque no explicita la variable sobre la que trabaja en cada momento para realizar las integrales. Por lo general lo hace sobre el eje CF que es común a la cicloide y al círculo, pero se trata de un caso particular, cuya generalización podría acarrear errores derivados de las dificultades relacionadas con el uso de los indivisibles.

FIG. 1



En cualquier caso, vemos una vez más cómo al tratar de resolver unos problemas concretos (la rectificación y cuadratura de la cicloide), Pascal se encontró con la necesidad de generar propiedades (aditividad de la integración) que inician el cuerpo teórico de lo que muy pronto será el cálculo infinitesimal.

SOBRE EL TRIÁNGULO CARACTERÍSTICO

En uno de sus últimos trabajos, *Traité des sinus du quart de cercle*, Pascal introdujo la noción de triángulo característico, con la cual abrió el camino para la creación del cálculo infinitesimal. Fue una de las pocas veces que Pascal hizo uso de las tangentes, si bien para calcular un área, sin darse cuenta que acababa de crear un concepto fundamental para realizar derivadas. Leibniz, que tuvo conocimiento en 1673 de la carta de Dettonville y de los tratados adjuntos (entre los que se encuentra este), desarrollaría esta idea de triángulo característico para mostrar la fecundidad de tal hallazgo.

«Quedé atónito al ver que lo tuvo tan cerca, pero es como si una venda en los ojos le hubiera impedido generalizar su teorema.»

— Gottfried Leibniz, comentario sobre Blaise Pascal a propósito del triángulo característico.

Pascal consideraba una circunferencia de radio *AB* dividida en arcos iguales, cuya longitud tiende a 0 cuando el número de arcos aumenta indefinidamente. En los puntos de separación de cada arco con el siguiente trazó tangentes a la circunferencia, de modo que el conjunto de tangentes determinan un polígono regular circunscrito a la circunferencia (figura 2).

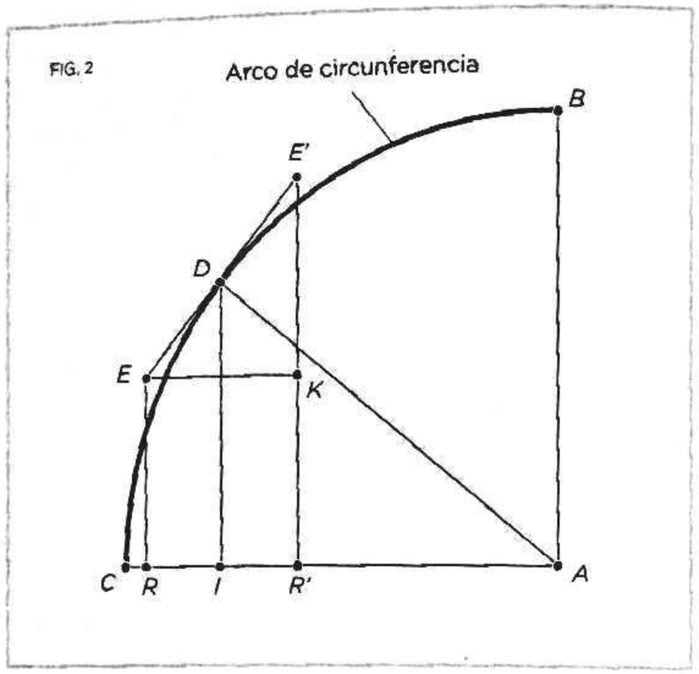
Sea *EE'* uno de los lados del polígono (determinado por una de las tangentes); consideremos también las dos ordenadas *ER* y *E'R'*, así como el segmento *EK* sobre una recta paralela al eje horizontal, y de modo que *K* sea la intersección de esta recta y de la ordenada *E'R'*. El triángulo *EKE'* recibe el nombre de triángulo característico.

FOTO SUPERIOR
Escultura de Giovanni Antonio Labus que representa a Bonaventura Cavalieri, quien, gracias a sus trabajos sobre los indivisibles, es considerado uno de los precursores del cálculo infinitesimal.

FOTO INFERIOR IZQUIERDA
El matemático suizo Johann Bernoulli fue el descubridor de la propiedad de la braquistocronía de la cicloide.

FOTO INFERIOR IZQUIERDA
El astrónomo y matemático Christiaan Huygens, corresponsal de Pascal, retratado por Bernard Vaillant en 1686.

FIG. 2



El triángulo característico de Pascal.

Consideremos ahora el punto D, punto de contacto de la tangente con el arco de circunferencia, y tracemos la ordenada DI (I está sobre la base CA). Se ha formado el triángulo ADI, que tiene un ángulo en el centro de la circunferencia. Entonces resulta que el triángulo característico EKE' y este nuevo triángulo ADI son semejantes. En palabras del propio Pascal se puede concluir que: «cada seno DI multiplicado por la tangente EE' es igual a cada distancia RR' multiplicada por el radio AB, es decir: $DI \cdot EE' = RR' \cdot AB$». En realidad, Pascal llamaba E tanto a E como a E', y R tanto a R como a R', lo que complica bastante la lectura de sus razonamientos.

Esta relación permitió a Pascal calcular la superficie engendrada por un arco de círculo cuando este gira alrededor de un eje vertical AB. En efecto, la igualdad anterior le proporcionba una relación entre las dos «diferenciales» EE' y RR', de modo que pudo expresar el área que estaba buscando a través de una fórmula en la que intervenía una sola diferencial (RR'). A partir de aquí, hallaría una integral que pudo reducir a una suma de senos en un círculo, cálculo que el propio Pascal ya había realizado.

Leibniz fue quien se dio cuenta de que lo que acababa de hacer Pascal era generalizable a una curva cualquiera, para lo cual basta con considerar que DA es la normal a la curva, siendo A la intersección entre la normal y la base, manteniéndose perpendicular a la tangente, lo que permite mantener las proporciones establecidas. Además, lo que para Pascal era una ingeniosa herramienta, para Leibniz se trataba de un hallazgo fundamental: cuando el triángulo característico tiende a cero (deberíamos decir: cuando los lados tienden a cero), se mantiene semejante a un mismo triángulo fijo y de dimensiones finitas, constituido por la ordenada, la normal y la base. En términos modernos podríamos decir que acababa de hallar una relación entre dos diferenciales (dx y dy).

Esta es posiblemente una de las principales contribuciones de Pascal al nacimiento del cálculo infinitesimal. Aunque no se le ocurriera la generalización realizada años después por Leibniz, seguramente porque no se interesaba por los métodos para establecer tangentes, e incluso no se percatara de la importancia de lo que estaba haciendo, lo cierto es que logró establecer una relación entre elementos diferenciales correspondientes a variables distintas, hecho de mayor trascendencia que cualquiera de los ingeniosos cálculos de integrales definidas realizados por él mismo.

En resumen, cabe afirmar que Pascal fue capaz de vislumbrar, plantear, abordar y, en algunos casos, resolver problemas clave que conciernen al cálculo infinitesimal, y al mismo tiempo destacar los puntos esenciales de las obras de sus predecesores, manteniendo siempre una relación con la geometría de los antiguos. Pero la falta de libertad para considerar el álgebra como algo independiente le impidió ver toda la generalidad de los resultados que tenía ante sí. Leibniz, que en más de una ocasión valoró el genio de Pascal, y que estudió su obra repetidamente, dijo que había momentos en que parecía que el francés llevaba una venda en los ojos que le impedía ir más adelante, a pesar de encontrarse tan cerca de establecer resultados fundamentales, los cuales sería, precisamente, el propio Leibniz —junto con Newton— quien lograría establecerlos.

CAPÍTULO 7

La obra de Pascal entre la ciencia y la filosofía

Guiado por la voluntad de fundamentar sus argumentos en la experiencia, Blaise Pascal no solo destacó como matemático sino también como físico del campo de las ciencias experimentales. Además, cultivó su faceta filosófica y teológica, sobre todo en los últimos años de su vida, con interesantes reflexiones sobre Dios, la moral, el conocimiento y la existencia humana.

Es posible afirmar que, como pensador, Pascal tiene una característica incómoda: es un personaje inmerso en una dualidad que en cierta manera resulta contradictoria. Por una parte está el científico, situado en el terreno de la razón, de los métodos de la demostración experimental y de la evidencia. Por otro, el teólogo, ubicado en el terreno donde la intuición y el sentimiento dirigen el conocimiento y la actitud hacia Dios. Dos polos ciertamente opuestos y que, a diferencia de los filósofos racionalistas de la época, con Descartes a la cabeza, Pascal nunca intentó reconciliar. Muy al contrario, defendió que, mientras la razón pertenece al hombre y debe utilizarse para desvelar las verdades de la naturaleza, la fe es el don que Dios nos ha dado para poder acceder a él. «El corazón tiene razones que la razón no conoce», escribió en sus *Pensamientos*. Pascal criticó la figura del Dios racional de los filósofos de la época, al afirmar que no necesitamos pruebas metafísicas de la existencia divina, ya que Dios es un tema reservado a la fe.

No obstante, nos topamos de nuevo con cierta tensión en el pensamiento de Pascal, ya que al mismo tiempo que defendía que la existencia de Dios es un tema exclusivo de fe, ofrecía un argumento de naturaleza probabilística para mostrar que elegir la creencia en Dios es una apuesta ganadora.

En este último capítulo trataremos algunos de los temas más importantes de la filosofía de Pascal, los que de alguna manera se

relacionan con su espíritu científico. Desde su teoría del conocimiento, que le sirvió para discutir sobre el acceso y la fundamentación del conocimiento natural, del conocimiento matemático y de las verdades divinas, hasta su apuesta por la creencia en la existencia de Dios, conocida como el *pari de Pascal* («la apuesta de Pascal»).

«A la verdad se llega tanto por la razón, como por el corazón.»

— PASCAL, *PENSAMIENTOS*.

LOS TERRENOS DE LA FE Y LA RAZÓN

A la pregunta «¿cómo se obtiene el conocimiento sobre el mundo?», se le han dado distintas respuestas a lo largo de la historia de la filosofía. Una de las discusiones más interesantes al respecto es la que enfrentó a las posturas racionalistas y empiristas de los siglos XVII-XVIII, respectivamente encabezadas por Descartes y el filósofo escocés David Hume (1711-1776). Los primeros defendían la existencia de ideas innatas a partir de las cuales se podría fundamentar todo el conocimiento utilizando razonamientos racionales; ideas como la de la existencia de Dios, la existencia del yo pensante (Descartes lo llamó «*res cogitans*») y ciertos principios matemáticos. Los segundos negaban cualquier conocimiento *a priori* y defendían que todo conocimiento se adquiere de la experiencia o se fundamenta en otro conocimiento adquirido a través de los sentidos.

Pascal no escribió una obra estrictamente dedicada a la teoría del conocimiento, a diferencia de Descartes, con sus *Meditaciones metafísicas*, o de Hume con sus *Investigaciones sobre el conocimiento humano*; sus ideas acerca del origen y fundamento del conocimiento humano se encuentran en algunos de sus trabajos científicos, de forma desgranada, como por ejemplo en el *Tratado sobre el vacío*, *Del espíritu geométrico* y *Del arte de persuadir*, así como en otras obras claramente filosóficas, como *Cartas provinciales* y *Pensamientos*. Su postura, a la vez que fragmentada, no permite clasificarlo en una de estas dos corrientes filosóficas: empirismo o racionalismo. Según Pascal, la razón, la experiencia y la fe se erigen por igual como medios para adquirir un conocimiento genuino, aunque se trate de saberes distintos.

EL ORIGEN DEL CONOCIMIENTO HUMANO

Las reflexiones de Pascal sobre la teoría del conocimiento fueron fruto de las inquietudes de la época. A lo largo del siglo XVII, los filósofos «naturales» (así se denominaba a los pensadores que no solo buscaban desvelar el funcionamiento de la naturaleza, sino que también reflexionaban sobre temas humanistas) estaban inmersos en debates epistemológicos sobre la validez del conocimiento científico, en torno a cuestiones como: ¿proporcionan la observación y la experimentación conocimiento genuino?, ¿qué confianza debe darse a las hipótesis que los filósofos plantean para dar cuenta de ciertos fenómenos naturales?, ¿hay principios que supuestamente puedan servir como fundamento de todo conocimiento?

Por otra parte, el conocimiento sobre Dios era otro de los grandes temas de estudio de la época, y los filósofos naturales también dedicaron tiempo y esfuerzos a reflexionar sobre ello. Probablemente, la cuestión más discutida entre estos pensadores en relación a la teología era la siguiente: ¿hay que dar demostraciones racionales de la existencia de Dios? Los racionalistas de la época así lo consideraban, y de hecho dieron, como hizo Descartes, varios tipos de argumentos racionales (argumento ontológico, argumento cosmológico y argumento gnoseológico), como se verá más adelante.

Pascal, por su parte, trató estas cuestiones haciendo hincapié en una distinción muy importante. Por una parte, dijo, tenemos el conocimiento científico, el terreno de la razón, conocimiento que se puede confirmar de forma provisional y probable mediante la elaboración de hipótesis. De otro lado están las cuestiones de teología, que son terreno de la fe. Este conocimiento está formado

por verdades absolutas, que trascienden a la razón. Razón y fe, pues, no son incompatibles siempre y cuando cada una respete su dominio de aplicación. La razón debe llegar hasta donde pueda para descubrir verdades tanto abstractas (en las matemáticas) como empíricas (de la física y otras ciencias naturales), pero no puede invadir territorios que no le pertenecen. La fe, por su parte, no debe entrometerse en cuestiones científicas, ya que negar el progreso científico sería como traicionar a la razón humana.

Hay que enfatizar que los filósofos racionalistas del siglo XVIII, particularmente importantes en Francia por la influencia de Descartes, no seguían el patrón defendido por Pascal, ya que utilizaban la razón para dirimir sobre temas de moral y religión. En síntesis, Pascal consideraba que la fe es el medio para obtener conocimiento divino, mientras la razón y la experimentación lo son para la obtención del conocimiento de la naturaleza. Estos dos tipos de conocimiento, a su entender, tenían características muy distintas.

LAS VERDADES DE LA FE O EL CORAZÓN

La teología obtiene sus verdades por vía del principio de autoridad, de las Sagradas Escrituras. Las cuales, según Pascal, son inseparables de la verdad, por lo que es suficiente apelar a esta autoridad para adquirir conocimiento veraz sobre Dios, que no se puede conocer de otra forma. Así pues, tal principio de autoridad es legítimo y necesario. Las verdades de que provee son

EL RACIONALISMO CARTESIANO Y DIOS

El francés René Descartes, uno de los filósofos más importantes de la historia de la filosofía occidental y uno de los artífices de la algebrización de la geometría, expuso en sus *Meditaciones metafísicas* un escepticismo que duda metódicamente de todo conocimiento previamente recibido, así como de los sentidos como medio para adquirir conocimiento genuino. Esta duda, empero, se detiene ante unos principios innatos que aparecen ante la mente como verdaderos: la existencia del yo como ser que piensa (*res cogitans*), de Dios y de ciertos conceptos de las matemáticas. A partir de estos elementos sentó todo el conocimiento, para llegar a fundamentar la existencia del mundo sensible y de los demás seres. También ofreció tres demostraciones de la existencia de Dios, algunas de ellas ya conocidas desde la época del benedictino Anselmo de Canterbury (1033-1109) y del dominico Tomás de Aquino (1224-1274).

Demostraciones de la existencia de Dios

Los argumentos sobre la existencia de Dios son tres: ontológico, cosmológico y gnoseológico. El argumento ontológico concibe a Dios como omnisciente, omnipresente y perfecto, y como la existencia es una propiedad indispensable de la perfección, no se puede concebir un ser perfecto sin que exista, aparte de que la existencia real es más perfecta que la mera existencia en las mentes de los individuos; en definitiva, la existencia es parte integrante de la esencia y en consecuencia Dios existe. El argumento cosmológico indica que todo tiene que tener una causa (mis padres son mi causa como ellos fueron creados por sus padres, etc.), y para evitar un regreso al infinito hay que detenerse en algún lugar, en Dios, que es el garante de esta cadena causal; así pues, Dios tiene que existir como causa final de mi existencia. Por último, el argumento gnoseológico indica que en nuestras mentes se encuentra la idea de Dios como un ser infinito y perfecto. Esta idea no puede provenir del exterior (idea adventicia), como si fuera fruto de los sentidos, ya que en tanto que somos seres finitos, nunca hemos presenciado un ser de tal naturaleza. Tampoco es una idea creada por nuestro pensamiento (idea ficticia), ya que este es imperfecto y la perfección no puede proceder de la imperfección. Esta idea de Dios innata, que está en mí pero no procede de mí, solo puede tener como causa a un ser infinito y perfecto, es decir, Dios. Sobre estos argumentos racionales, Pascal opinaba que no tienen ningún sentido, puesto que la existencia de Dios solo se conoce, decía, a través de la fe (el conocimiento revelado) y no de la razón.

Detalle de un lienzo del pintor francés Pierre Louis Dumesnil (1698-1781) que representa a la reina Cristina de Suecia sentada en una mesa, flanqueada a su izquierda por el filósofo y matemático René Descartes, a quien la monarca había invitado a su corte.

de carácter eterno e inmutable; verdades absolutas que nada puede cambiar, ni el paso de los tiempos ni la existencia de nuevos descubrimientos.

«Hay dos extremos: excluir la razón y no admitir nada más que la razón.»

— Blaise Pascal.

Ahora bien, ¿funciona el principio anterior para la obtención del conocimiento de la naturaleza? No parece ser así, según Pascal. En el terreno del conocimiento natural no hay autoridad que valga, sino razonamiento y demostración. Sin la razón se hace imposible poseerlo, y solo con el poder de aquella se desarrollan las ciencias empíricas. No obstante, las verdades que se obtienen a partir de la razón tienen, en cierto sentido, menos fuerza fundamentativa, es decir, como fruto del ingenio humano, del razonamiento y de la experimentación son verdades graduales, que van creciendo en valor de certeza con el tiempo, pero carecen de la solidez de las verdades eternas de la teología.

Por otra parte, más allá del principio de autoridad de las Sagradas Escrituras, Pascal apelará al corazón (fe) y sus razones como un elemento clave para poder conocer a Dios. Las verdades del corazón —que se entienden como distintas a las verdades de la naturaleza o la razón— tienen su origen en Dios y están vedadas al raciocinio. Tales verdades se centran en la existencia de Dios y, de alguna forma, el hombre busca en el corazón aquello que con la razón no ha podido comprender. Después, al descubrir su presencia, la razón busca la manera de comprenderlas.

Así pues, el corazón proporciona ciertas respuestas que la razón no puede dar, porque se encuentran más allá de su alcance. Pascal no pretendía convertir el conocimiento religioso en irracional, desprendiéndose de la razón, pero sí negó que esta posea un protagonismo principal. El corazón y sus razones tienen una función esencial, mientras que la razón queda de alguna forma sometida. La fe se entiende y se vive con el corazón, mientras que la naturaleza se lee con la razón.

EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Ya en los últimos años de su vida, Pascal pasó temporadas de retiro en el monasterio de Port-Royal-des-Champs (sede de la orden de los Jansenistas), situado en el valle de Chevreuse, al suroeste de París, donde vivía su hermana Jacqueline, la monja. Fue allí donde el sacerdote, teólogo y matemático Antoine Arnauld (1612-1694), que por aquel entonces estaba al frente de la comunidad de Port-Royal, le encargó la creación de un prólogo para el libro *Elements de geometrie*, el cual, una vez escrito, el propio Arnauld modificó a su agrado. No obstante, el original se conservó y está formado por dos partes claramente distintas: *Del espíritu geométrico* y *Del arte de persuadir*. Es en esta obra, principalmente en la primera parte, donde Pascal, a pesar de la inferioridad que atribuía a las verdades de la razón frente a las divinas, intentó describir el método ideal del saber científico demostrativo.

Pascal se preguntaba cómo tienen que plantearse nuestras demostraciones para ser convincentes, y llegó a la conclusión de que el ideal del conocimiento demostrativo se basa en dos premisas: 1) no utilizar términos cuyo significado no se haya explicado claramente con anterioridad, y 2) no tomar como cierta una proposición que no se haya demostrado a través de verdades previamente conocidas.

En el modelo ideal del método demostrativo hay que definir todos los términos y demostrar todas las proposiciones para verificar su carácter de verdad. Sin embargo, el problema es que tenemos una regresión al infinito, es decir, cada proposición/término utilizado se fundamenta en otra proposición/término, y así sucesivamente hasta el infinito. Hay que detenerse en algún momento y aceptar unos principios primeros. Toda ciencia, dijo Pascal, padece este problema, y es por eso que las verdades obtenidas con la razón tienen un estatuto distinto de las verdades de la fe o del corazón.

Aunque este método sea ideal y, por lo tanto, inalcanzable, puesto que no se pueden definir/demostrar todas las proposiciones de la ciencia, la geometría tiene un método quizá menos preciso, pero no menos cierto. Aunque esta disciplina no puede definirlo todo, lo que hace es suponer solo aquellas proposiciones que son evidentes a la luz de la razón (axiomas), y las establece como

primeras verdades a partir de las cuales todas las otras se demostrarán. Términos como «espacio», «tiempo», «igualdad» o «número» no necesitan definición, ya que aparecen como claras a la luz de cualquier mente racional. Intentar definirlas no haría sino oscurecerlas. Es, pues, por intuición que se alcanzan tales principios. En geometría, al fin y al cabo, todo queda demostrado, sea por prueba o por luz natural (evidencia).

Una vez disponemos de las verdades fundamentales, la geometría muestra que con los axiomas evidentes a la luz de la razón somos capaces de obtener, a través de la demostración, otras verdades convincentes.

A continuación, Pascal indicó que ese método de obtención de saber a partir de verdades fundamentales consta de tres acciones esenciales: 1) el uso de definiciones claras (hay que definir cada termino que se vaya a utilizar), 2) la proposición de axiomas evidentes como fundamentos de las pruebas y 3) la sustitución en las demostraciones de los términos definidos por las definiciones.

Para explicitar estas tres partes, hay que utilizar reglas correspondientes a las definiciones, los axiomas y las demostraciones: 1) nunca se debe admitir sin definición un término oscuro o equívoco; 2) solo hay que enunciar cosas evidentes en los axiomas, y 3) hay que probar todas las proposiciones usando los axiomas evidentes u otras proposiciones ya demostradas y admitidas.

De esta forma, Pascal construyó en *Del espíritu geométrico* y *Del arte de persuadir* lo que para él sería el ideal del saber científico, que como se ha visto se basaba en el método de la geometría.

La pregunta que uno puede legítimamente hacerse en este punto es si otras ciencias —como la física, materia que por aquel entonces era ante todo una disciplina experimental— utilizan este método para fundamentar su conocimiento de una forma robusta y demostrativa.

CONOCIMIENTO EXPERIMENTAL: LAS HIPÓTESIS

A diferencia del conocimiento matemático, el conocimiento experimental consiste en la elaboración de hipótesis que se refutan o

confirman a través de la observación y la experimentación. Tales hipótesis son esenciales para desvelar los secretos de la naturaleza. Pascal practicó de primera mano la investigación de la naturaleza a través de la postulación de hipótesis, y la confirmación o refutación de ellas mediante experimentos cruciales; así hizo en el Tratado sobre el vacío, donde se exponen los experimentos realizados en el Puy-de-Dôme.

> «¿Después de todo, qué es el hombre en la naturaleza? Nada en relación con la infinitud, todo en relación a la nada. Un punto central entre la nada y el todo, pero lejos de entender la diferencia entre estos dos extremos.»
>
> — BLAISE PASCAL.

Como ya se comentó, Pascal estaba inmerso en la controversia sobre la existencia del vacío con otros científicos de la época, como Descartes, que defendían la hipótesis opuesta. Su práctica como físico consistía en proponer ciertas hipótesis sobre la existencia del vacío, y diseñar experimentos que pudieran ser cruciales para confirmar o refutar las predicciones que se derivaban de tales hipótesis. A su entender existen tres tipos de argumentos posibles en las refutaciones de hipótesis: 1) si la negación de la hipótesis conlleva un absurdo, esta tiene que ser cierta; 2) si la afirmación de otras hipótesis contrarias implica consecuencias absurdas, estas deben ser falsas; y 3) si no se encuentran consecuencias absurdas ni en la aceptación ni la negación de la hipótesis, no se puede obtener ninguna conclusión en relación con la verdad de tal hipótesis.

Estas reflexiones proceden de las matemáticas, más concretamente del método de demostración conocido como «reducción al absurdo». De esta manera, por ejemplo, es como se demuestra la existencia del infinito numérico: imaginemos el número más elevado posible; dado este número, por muy grande que sea, siempre se le podrá añadir una unidad, por lo tanto no será el más grande. Se muestra, de esta forma, que la finitud en los números

aparece como una hipótesis absurda, con lo cual solo cabe la opción de aceptar su opuesta, es decir, la infinitud.

No obstante, como ya se dijo, Pascal consideraba que el conocimiento a través de hipótesis es más incierto que el conocimiento matemático, y aún más que las verdades de la fe o del corazón. Por lo tanto, ¿cuál es el estatus de las hipótesis? ¿Proporcionan conocimiento genuino, a pesar de su incerteza?

En *Del espíritu geométrico*, Pascal asumió una versión fundacionalista (la necesaria existencia de unos principios primeros del conocimiento), basada en el método de la geometría, donde se establecen unos principios básicos a partir de los cuales se deriva más conocimiento. Y a la ya mencionada pregunta, ¿funciona la física de esta manera?, Pascal respondería afirmativamente, pero con matices. Defendía que la ciencia experimental proporciona conocimiento genuino por el hecho de que se asemeja lo suficiente a las matemáticas, y, en particular, al método fundacionalista de la geometría. Asimismo, consideraba que a partir de la experimentación y de la observación era posible encontrar ciertos principios que sirvieran como punto de partida. A este respecto cabe decir que la certeza de los resultados experimentales de la época, su utilidad como principios a partir de los cuales se podían dar otras demostraciones, y la facilidad con que los científicos desarrollaban experimentos apropiados y observaciones relevantes, llevó a Pascal a tener una visión muy optimista del progreso científico.

La obtención de conocimiento natural a partir de la postulación de hipótesis parece haber sido el método de la ciencia experimental para desvelar los secretos de la naturaleza, y filósofos de la ciencia como el austro-británico Karl Popper (1902-1994), entre otros, trataron de dar explicaciones detalladas acerca de cómo funciona la corroboración o falsación de hipótesis, a través del estudio de la práctica científica. Lo que está claro es que Pascal fue una vez más un pensador avanzado a su época, ya que sus observaciones respecto al método experimental subrayaron algunos detalles que serían desarrollados con más extensión en la primera mitad del siglo XX.

KARL POPPER Y EL CRITERIO DE DEMARCACIÓN

El filósofo de origen austríaco Karl Popper, retratado en Berlín en 1993, meses antes de su fallecimiento en Londres.

Karl Popper, influyente filósofo de la ciencia, se propuso enunciar un criterio de demarcación que permitiera dictar qué teorías pertenecen a la ciencia o merecen tal calificativo y qué teorías merecen ser consideradas pseudociencia. Así hizo en su obra *La lógica de la investigación científica* (1934). A este criterio, Popper lo denominó «principio de falsabilidad o refutación», y sostiene que las proposiciones científicas son aquellas que pueden ser falsadas o refutadas (por ejemplo, Popper consideró que el psicoanálisis es una pseudociencia, por ser, al igual que la astrología, una doctrina que no puede ser falsada). Este criterio de demarcación, basado en la contrastación de hipótesis previamente establecidas, sería el punto de partida de una teoría del conocimiento que se oponía a toda forma de empirismo. Popper sostuvo que la práctica científica no es inductiva, es decir, no procede mediante observaciones repetidas y formulación de leyes, ya que no se pueden justificar tales leyes o inferencias inductivas sin caer en un círculo vicioso. Según Popper, la práctica o método científico es hipotético-deductivo, es decir, parte de la formulación de conjeturas/hipótesis audaces que seguidamente se someten a la contrastación empírica y sirven como punto de partida para deducir nuevo conocimiento. Así, la práctica científica consiste en buscar predicciones que sean fácilmente contrastables con la experiencia, predicciones que se deducen de la teoría a partir de enunciados ya previamente aceptados. Si estas predicciones pasan la prueba de la experiencia y son confirmadas, podemos decir que la teoría está corroborada. Hay que enfatizar, no obstante, que esta corroboración no es definitiva sino momentánea. Habrá que ir repitiendo este método a medida que se descubran nuevos enunciados y nuevas predicciones sean establecidas. Y en este último aspecto reside uno de los elementos más importantes de la filosofía de la ciencia de Popper: en lugar de tratar de verificar una teoría, hay que hacer todo lo posible para falsarla, ya que solo resistiendo tales intentos de falsación podemos decir que una teoría queda corroborada. En conclusión, no podemos afirmar de una teoría científica que esté definitivamente corroborada, ya que la corroboración definitiva equivaldría a la imposibilidad de falsación.

Al mismo tiempo, los modernos estudios de filosofía de la ciencia muestran que Pascal estaba equivocado cuando asumía que un experimento puede falsar una hipótesis con solo un caso en contra. No se percató de que, como mostraron varios filósofos de la ciencia, entre ellos el francés Pierre Duhem (1861-1916) y el estadounidense Willard van Orman Quine (1908-2000), cuando un experimento muestra el fallo de una hipótesis, esta no tiene por qué ser descartada o eliminada de inmediato, sino que hay que comprobar otras hipótesis que pueden estar conectadas, supuestas o asumidas en las observaciones, y que pueden haber contribuido a la errónea predicción falsada por el experimento. Este razonamiento se conoce como la tesis Duhem-Quine.

POR QUÉ APOSTAR POR DIOS: EL *PARI* DE PASCAL

De la sección anterior, parece claro que Pascal trazó una línea recta entre lo que pertenece al ámbito del conocimiento natural y lo que pertenece al conocimiento de Dios. Por una parte la razón, por otra parte el corazón, la fe.

Sin embargo, en la conocida «apuesta de Pascal», el filósofo dio un giro argumentativo y trató de defender de una forma racional que elegir la creencia en Dios supone una apuesta ganadora. El argumento estaba inspirado por su correspondencia con Fermat al respecto del estudio de la probabilidad, y más en concreto del problema de la partida inacabada, ya conocido. Se pone de relieve así el carácter contradictorio de esta empresa, ya que parece estar haciendo aquello de lo que nos ha prevenido, como es querer inmiscuir a la razón en el terreno de la fe... Aunque es posible dar con una interpretación del razonamiento de Pascal que sea compatible con sus ideas sobre la separación entre fe y razón.

Pascal era consciente del gran problema que subyacía a la vida y la acción de cada hombre de su época: o bien Dios existe o no existe. Este problema se erige como de naturaleza práctica al fin y al cabo, ya que dependiendo de una u otra opción, las reglas morales, el camino a seguir, el sentido de la vida, así como muchas otras cosas, serán de naturaleza muy distinta.

El argumento sobre el que versa este apartado y que Pascal plasmó en *Pensamientos* toma la forma de una apuesta. Por una parte, la apuesta del creyente, de otro lado la del ateo: uno apuesta por la existencia de Dios, el otro por la no existencia. El argumento se desarrolla en forma de diálogo, donde Pascal parece discutir con un contrincante escéptico, y el objetivo será mostrar cómo la apuesta por la creencia en Dios maximiza las ganancias en los dos escenarios —Dios existe o Dios no existe— con respecto a la apuesta contraria.

Antes de entrar a discutir sobre el argumento en sí, es interesante comentar el inicio del fragmento donde Pascal lo presenta, titulado *Infinito-nada*. A su inicio se reflexiona sobre la noción de infinito, para mostrar cómo es posible conocer la existencia de alguna cosa sin conocer su naturaleza. Es interesante citar las siguientes líneas: «Sabemos que existe un infinito pero ignoramos su naturaleza, de la misma manera que sabemos que es falso que los números sean finitos. Es cierto que hay un infinito en números, pero no sabemos qué es. Es falso que sea par o impar, ya que añadiendo una unidad no cambia su naturaleza. Sin embargo, es un número, y los números son o bien pares o impares. [...] De la misma forma bien podemos conocer que hay un Dios sin saber qué es».

Una vez más vemos el genio de Pascal, en relación con la demostración matemática: no solo fue uno de los primeros en utilizar de manera explícita el método de demostración por inducción (como se vio en el caso del triángulo aritmético), sino que en *Pensamientos* afirmó que, a veces, cuando no podemos conocer algo, lo que debemos intentar es demostrar que existe. En los siglos posteriores, las matemáticas utilizaron repetidamente este camino, formulando y demostrando numerosos teoremas de existencia.

Sin embargo, este argumento es débil, por no decir incorrecto. Pascal supuso que el infinito es un número y demostró que no tiene paridad, lo cual le permitió afirmar que, a pesar de ser un número, su naturaleza era distinta del resto de los números finitos. De esta contradicción dedujo que no podemos conocer la naturaleza del infinito, pero tampoco dudar de su existencia. Algunos críticos atribuyen la debilidad de este argumento a la poca investigación habida en esa época sobre el infinito matemático, así

como a la propia noción de número entero, de la que Pascal difícilmente podía dar una definición precisa. En la actualidad, gracias a las contribuciones del matemático alemán —de origen ruso— Georg Cantor (1845-1918), entre otros, este tipo de paradojas sobre el infinito han quedado explicadas y resueltas.

Analicemos el razonamiento de la apuesta que sigue al fragmento sobre el infinito numérico. El argumento empieza con Pascal respondiendo al supuesto interlocutor escéptico, ante la crítica que este hace a la necesidad de la apuesta en sí misma. El escéptico no apunta al error de una u otra postura (la existencia o la no existencia de Dios), sino que defiende una posición agnóstica, y, por lo tanto, mantiene que los dos, ateo y creyente están errados, ya que la actitud correcta ante tal juego sería suspender el juicio y no apostar. Pascal le rebate diciendo que no puede no jugar; es necesario apostar, dirá, hay que decidir de qué lado estamos, no podemos suspender el juicio ante la trascendencia de tal cuestión. Entonces, a partir del supuesto «es obligado apostar», ¿de qué lado nos decantamos? Examinemos el resto de la argumentación de forma detallada.

Parece que en tal empresa la razón no puede jugar un papel determinante, ya que ante ella se presenta un caos que no puede alcanzar a esclarecer. Ella no nos sirve para tomar cartas en el asunto, no nos sirve para descartar una de las dos apuestas, lo único que la razón nos dicta es la necesidad de elegir una opción, la necesidad de jugar, nada más.

Pongamos en una balanza, pues, todo aquello que podemos ganar y perder en la apuesta: en primer lugar hay dos cosas que perder, la verdad y el bien. Hay dos cosas en juego, la razón (conocimiento) y la voluntad (beatitud). Por último, hay dos cosas a

GEORG CANTOR Y EL ARGUMENTO DE LA DIAGONAL

Georg Cantor demostró que existen distintos infinitos numéricos e infinitos infinitos: los números naturales son el infinito más pequeño, y los números reales un infinito mayor (es decir, no numerable). Para demostrarlo presentó el llamado «argumento de la diagonal», que muestra la imposibilidad de establecer una biyección entre estos dos conjuntos (es decir, una función entre dos conjuntos que empareja cada elemento de un conjunto con un elemento del otro, de modo que, sin repetir ningún elemento, no quede ninguno sin emparejar).

La biyección de Cantor

Un conjunto es numerable si se puede biyectar con el conjunto de los números naturales; por ejemplo, el conjunto de los enteros es numerable, ya que hay una manera de ordenarlos. Basta con colocarlos en forma de sucesión, 0, 1, –1, 2, –2, 3, –3... Algo similar sucede con los racionales (aunque la prueba no es tan sencilla y no la incluimos aquí por motivos de espacio). Para demostrar que los números reales no son numerables, basta verlo para los reales del intervalo [0,1]. Para ello, Cantor imaginó que existía una biyección entre los naturales y los elementos de dicho intervalo; a partir de esta suposición, que le permitía tener una lista con todos los números, construyó un nuevo número real que pertenecía al intervalo pero no estaba en la lista, lo cual es una contradicción que demuestra la imposibilidad de ordenar los números reales. Cantor consideró los números reales del intervalo [0,1] formando una lista (r_1, r_2, r_3, ...) y los expresó en forma decimal. Seguidamente representó esta lista pero sin seguir un orden, simplemente añadiendo los números que pertenecen a este intervalo:

$r_1 = 0,\mathbf{5}328741...$
$r_2 = 0,3\mathbf{7}29582...$
$r_3 = 0,97\mathbf{5}0163...$
$r_4 = 0,246\mathbf{9}394...$
$r_5 = 0,1082\mathbf{6}75...$
$r_6 = 0,05327\mathbf{0}6...$
...

Por hipótesis, esta lista contenía todos los números reales del intervalo [0,1]. Entonces, Cantor propuso construir un número, que debería estar en dicha lista, formado de la siguiente forma: la primera cifra decimal será igual a la cifra del primer número de la lista más 1, la segunda igual a la segunda cifra del segundo número más 1 (al 9 se lo sustituye por 0). Este número será:

$$x_k = 0,686071...$$

x_k es claramente un número real entre 0 y 1, pero no está en la lista. No coincide con el primero (difiere de este en la primera cifra), no es el segundo, por el mismo argumento respecto a la segunda cifra, y así sucesivamente con todos los números de la lista. Esto nos lleva a la conclusión de que x_k no se encuentra en la biyección, y, por lo tanto, la lista no está completa, lo que contradice la suposición de que el intervalo [0,1] era numerable; por lo tanto, se demuestra que no lo es.

evitar: el error y la infelicidad (miseria). Como ya hemos dicho, desde el punto de vista de la razón no hay motivo para decantarse por una u otra opción. Pero, si atendemos a la felicidad, la elección parece clara: si apostamos por Dios y ganamos, lo ganamos todo, y si no, no perdemos nada.

El escéptico cede ante un argumento tan ingenioso, y acepta que tiene que apostar. No obstante, al aceptar la apuesta seguirá pensando que es demasiado arriesgada. Es en este punto cuando Pascal apela de nuevo a la noción de infinito, para argumentar que, apostando por la creencia en Dios, se obtienen más beneficios que apostando en contra: hay igual probabilidad de ganar que de perder, de esto se encarga el azar. Así, si hubiéramos de apostar para ganar dos vidas en vez de una, convendría hacerlo; pero, ¿y si fueran tres vidas frente a una? Sería de necios no apostar (recordemos que en este caso la apuesta implicaría ganar tres vidas o quedarse con una, y en ningún caso implicaría perder la única vida de la que disponemos). Lo que ofrece la creencia en Dios no son dos o tres vidas, sino una infinidad de ellas, la vida eterna. Esto es lo que ganamos si apostamos por la existencia de Dios y este finalmente existe.

¿Qué sucede si perdemos la apuesta habiendo elegido a Dios? Siguiendo el camino del creyente cristiano, seríamos honrados, bondadosos, honestos, fieles, buenos amigos... No dispondríamos de los placeres ni de los deleites de la vida libertina, pero, siguiendo el camino de Dios, se observaría una tal certidumbre que al final veríamos recompensada nuestra apuesta en Dios.

¿Qué sucede si apostamos por la no existencia de Dios? Parece ser que si finalmente Dios no existe, no ganamos demasiado con respecto al cristiano, mientras que si Dios existe, el creyente se queda con todo, la vida eterna, el infinito, el paraíso; sin embargo, el ateo se queda sin nada.

El argumento resulta claro, aunque Pascal hizo caso omiso de sus propios principios, que le dictaban mantener la razón a raya con respecto a las cuestiones de Dios. Entonces, cabe preguntarse qué es lo que distingue esta estrategia del resto de demostraciones racionales sobre la existencia divina de la época.

En su defensa cabe decir que un tal razonamiento está escrito desde la perspectiva de alguien que ya cree en la existencia de

Dios, y que cree que la fe es un regalo divino, no de alguien que pretende convencer a los ateos, ni de alguien que quiera fundamentar el conocimiento de Dios en base a la razón. La creencia en la existencia de Dios no se elige una vez hemos sido convencidos por el argumento, sino que el argumento es posterior a la fe. En este argumento, la razón, aunque siempre superada por la fe en temas de Dios, puede mostrar que tal fe no es impropia ni se contradice con la naturaleza humana, sino que, al contrario de lo que pudiera parecer, creer en la existencia de Dios, lejos de ser algo irracional, se convierte en algo por lo que vale la pena apostar.

«Prefiero equivocarme creyendo en un dios que no existe, que equivocarme no creyendo en un dios que existe.»

— BLAISE PASCAL.

Si analizamos el razonamiento de Pascal, al margen de que se aplique a la existencia de Dios, encontramos ciertas similitudes con lo que tres siglos más tarde hará la teoría de juegos. En efecto, esta teoría trata de analizar la toma de decisiones frente a una determinada situación, por ejemplo, una negociación, y en particular pretende establecer cuál es la estrategia ganadora, es decir, la mejor manera de «jugar», lo que en términos de Pascal sería la mejor «apuesta». Sin embargo, la inexistencia de las bases de esta teoría en el siglo XVII hace que los argumentos de Pascal estén todavía muy lejos de la teoría de juegos.

LOS ÚLTIMOS AÑOS DE LA VIDA DE PASCAL

Durante los últimos ocho años de la vida de Pascal, y en particular a partir de la llamada segunda conversión, Pascal renunció a la vida mundana que había llevado durante un corto período posterior a la muerte de su padre y decidió emprender un viaje espiritual que lo llevaría a pasar largas estancias de reflexión en la abadía de Port-Royal, siguiendo el consejo de su hermana Jacqueline. Este entorno,

junto con sus creencias religiosas, hizo que sus esfuerzos intelectuales, que a pesar de sus graves dolencias continuó desarrollando, fueran decantándose hacia las reflexiones teológicas y filosóficas, y sus investigaciones matemáticas y físicas fueron cada vez más escasas.

Sin embargo, su obra no cesó: la principal tarea de Pascal consistió en escribir una apología del cristianismo, conjunto de reflexiones publicadas póstumamente, en 1670, bajo el nombre de *Pensamientos*. Además, y fruto también de su experiencia mística, escribirá *Las cartas provinciales*, en defensa del jansenista Antoine Arnauld. En los *Pensamientos*, obra de gran riqueza e importancia filosófica, Pascal entrelazó su devoción religiosa con varios temas fundamentales de la filosofía: la naturaleza humana, el conocimiento y el escepticismo, la ciencia, el conflicto entre fe y razón, la nada y el infinito.

A pesar de su cada vez más deteriorado estado de salud, en 1658 presentó el plan de su apología del cristianismo en Port-Royal y aún tuvo tiempo para organizar un concurso de problemas sobre la *roulette*, así como escribir tres pequeños ensayos dedicados al estudio de esta célebre curva, conocida como cicloide, junto con otras obras matemáticas escritas en forma de cartas y publicadas con pseudónimo. El año siguiente (1659), último en el que todavía realizó trabajos relevantes, visitó a su hermana en Clermont-Ferrand, donde encontró energías suficientes para escribir dos pequeños ensayos: *Priere pour demander à Dieu le bon usage des maladies*, y *Trois discurs sur la condition des Grands*, la primera de ellas de carácter teológico, y la segunda de carácter político, en la cual Pascal defendió un modelo de sociedad aristocrática.

Su vida se apagó el 19 de agosto de 1662, dejando un legado filosófico, científico y matemático de un valor incalculable, que le valió para ser considerado uno de los grandes pensadores y científicos franceses de todos los tiempos. Murió acompañado de su hermana Gilberte, que estuvo con él hasta el final. Se dice que sus últimas palabras fueron: «Que Dios nunca me abandone».

Lecturas recomendadas

Boyer, C. B. *Historia de la matemática*, Madrid, Alianza Editorial, 2007.

Courant, R. y Robbins, H., *¿Qué son las matemáticas?*, México, Fondo de Cultura Económica, 2002.

Deulofeu, J., *Prisioneros con dilemas y estrategias dominantes. Introducción a la Teoría de juegos*, Barcelona, RBA, 2010.

García Merayo, F., *Pascal: un genio precoz*, Madrid, Nívola, 2007.

González Urbaneja, P. M., *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*, Madrid, Alianza Editorial, 1992.

Kline, M., *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Madrid, Alianza Editorial, 2012.

Lluís Font, P., «Pascal», Llovet, J. (ed.), *Lecciones de literatura universal*, Madrid, Ediciones Cátedra, 1995.

Pascal, B., *Pensamientos*, Madrid, Valdemar, 2001.

—: *Relación de la gran experiencia del equilibrio de los líquidos*, Madrid, INTEMAC, 1981.

—: *Tratados de pneumática*, Madrid, Alianza Editorial, 1984.

Reale, G. y Antiseri, D., *Historia del pensamiento filosófico y científico*, Barcelona, Herder Editorial, 1988.

Tatón, R. (Ed.), *La ciencia moderna*, volumen II de *Historia general de las ciencias*, Barcelona, Ediciones Destino, 1972.

Villar, A., *Pascal, ciencia y creencia*, 1994, Ediciones Pedagógicas, Madrid.

Índice

ábaco 42, 44
aparatos hidráulicos 67
Ars conjectandi 82, 89, 105

binomio de Newton 86
biyección 146, 147
braquistocronía 110, 111, 127
Brouillon-Project d'une atteinte aux evenements des recontres d'un cone avec un plan 21

calculadora mecánica 38-40, 44, 45, 47, 48, 50-52
cálculo
  de cuadraturas 10, 113, 116, 117, 122
  de magnitudes continuas 124
  de probabilidades 87, 89, 96, 109
  de tangentes 10, 22, 117, 118, 126, 129
  infinitesimal 10, 13, 21, 96, 107, 108, 110, 112-116, 118-120, 126, 127, 129
caracol de Pascal 19, 111
centro de gravedad 59, 68, 114
cicloide 11, 13, 59, 109-119, 124-127, 150
coeficientes del binomio 73
combinatoria 10, 11, 72, 82, 92, 99, 100, 105
concoide 113
cónicas 8, 9, 15, 18, 20-23, 25, 32, 92, 111
Conicorum opus completum 22
conocimiento
  a priori 67, 136
  científico 137
  matemático 136, 141, 142, 144
contrastación de hipótesis 145

De l'equilibre des liqueurs 58, 63, 68
De la pesanteur de la masse d'air 58, 68
De motu 61
Del arte de persuadir 136, 141, 142
Del espíritu geométrico 136
demostración
  por inducción 10, 71, 79, 81, 82, 84, 85, 88, 147
  por reducción al absurdo 14

Desargues, Gérard 18, 20, 21, 23, 31, 33

equivalencia
de áreas 121
de volúmenes 122
Essay pour les coniques 13, 15, 18, 20
espiral de Arquímedes 113
Experiences nouvelles touchant le vide 57, 62, 63

fractal de Sierpinski 82

geometría
analítica 15, 21, 25, 33-35
proyectiva 9, 17, 18, 20-23, 25, 31-36, 40, 111
sintética 15, 33, 34
Geometrie du hasard 95

hexagrama místico 9, 23
Histoire de la roulette 114, 116-118
horror vacui 7, 57, 59

indivisible 115, 121-127, 129
inducción completa 10, 71, 79, 81
infinito 11, 26, 28, 31, 33, 35, 57, 85, 98, 107, 124, 125, 138, 139, 141, 143, 147, 148, 150, 152
integración 124, 126-128

juegos de azar 10, 74, 78, 88, 91, 92, 94, 97

Liber de ludo alae 93
logaritmos 42, 45, 122

máquina analítica de Babbage 53
método de exhaución 121, 124
Möbius, August Ferdinand 32
Napier, John 44, 45, 122

números
combinatorios 73, 74, 86, 87, 88, 102, 104
complejos 37, 43, 44
figurados 74, 79, 86, 87
irracionales 43
negativos 43

Opera geometrica 61

pari de Pascal 11, 136
paridad 147
pascalina 9, 11, 13, 39, 52
Pensamientos 98, 114, 137, 147
Preface pour le traité du vide 58
premisas del conocimiento
demostrativo 141
presión atmosférica 7, 9, 10, 42, 58, 59, 61, 64, 65, 68
principio
de Cavalieri 115, 121, 122, 124, 125
de dualidad 33-35
de falsabilidad 145
de Pascal 11, 68
probabilidad 10, 11, 74, 84, 91, 92, 94, 96, 98-107, 111, 114, 146, 150
problema de la partida interrumpida 10, 93, 94, 101
propiedad aditiva de la integración 127
puntos de Steiner 32

rectas de Plücker 32
rectificación de la cicloide 114, 119, 127
refutación de hipótesis 143, 145
Roulette 11, 111, 114, 116-118, 127

sistema de numeración 44, 46
Sopra le scopertre dei dadi 93
suma de potencias, 126

tautocronía 112
teorema
de Brianchon 36
de Pappus 26, 27
de Pascal 11, 20, 22, 23, 26, 27, 30, 33, 36, 37
teoría
de juegos 99, 151
de números 82, 96, 98, 111,
del conocimiento 136, 137, 14,
Theorie analytique des probabilités 91, 105
Traité des propietés projectives des figures 34
Traité des sinus du quart de cercle 128
Traité du triangle arithmétique 76, 78, 80
triángulo
aritmético 10, 73-78, 80, 81, 83, 84, 86, 87, 98, 147
característico 11, 120, 128, 130
de Sierpinski 82, 83
Triligne rectangle 121
trocoide 115

vacío 7, 10, 13, 42, 45, 57-60, 65-67, 70, 91, 126, 136, 143